967

UNIVERSITE PARIS SUD

Centre d'Orsay

Thèses présentées pour obtenir le grade de
Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Jean-Pierre SCHREIBER

1ère thèse : **Approximations diophantiennes et problèmes additifs dans les groupes abéliens localement compacts**

2ème thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le juin 1972 devant la Commission d'Examen

J.-P. Kahane Président
Y. Meyer, J. Neveu Examinateurs

UNIVERSITE PARIS SUD

Centre d'Orsay

Thèses présentées pour obtenir le grade de
Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Jean-Pierre SCHREIBER

1ère thèse : **Approximations diophantiennes et problèmes additifs dans les groupes abéliens localement compacts**

2ème thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le juin 1972 devant la Commission d'Examen

J.-P. Kahane	Président
Y. Meyer	Examinateurs
J. Neveu	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

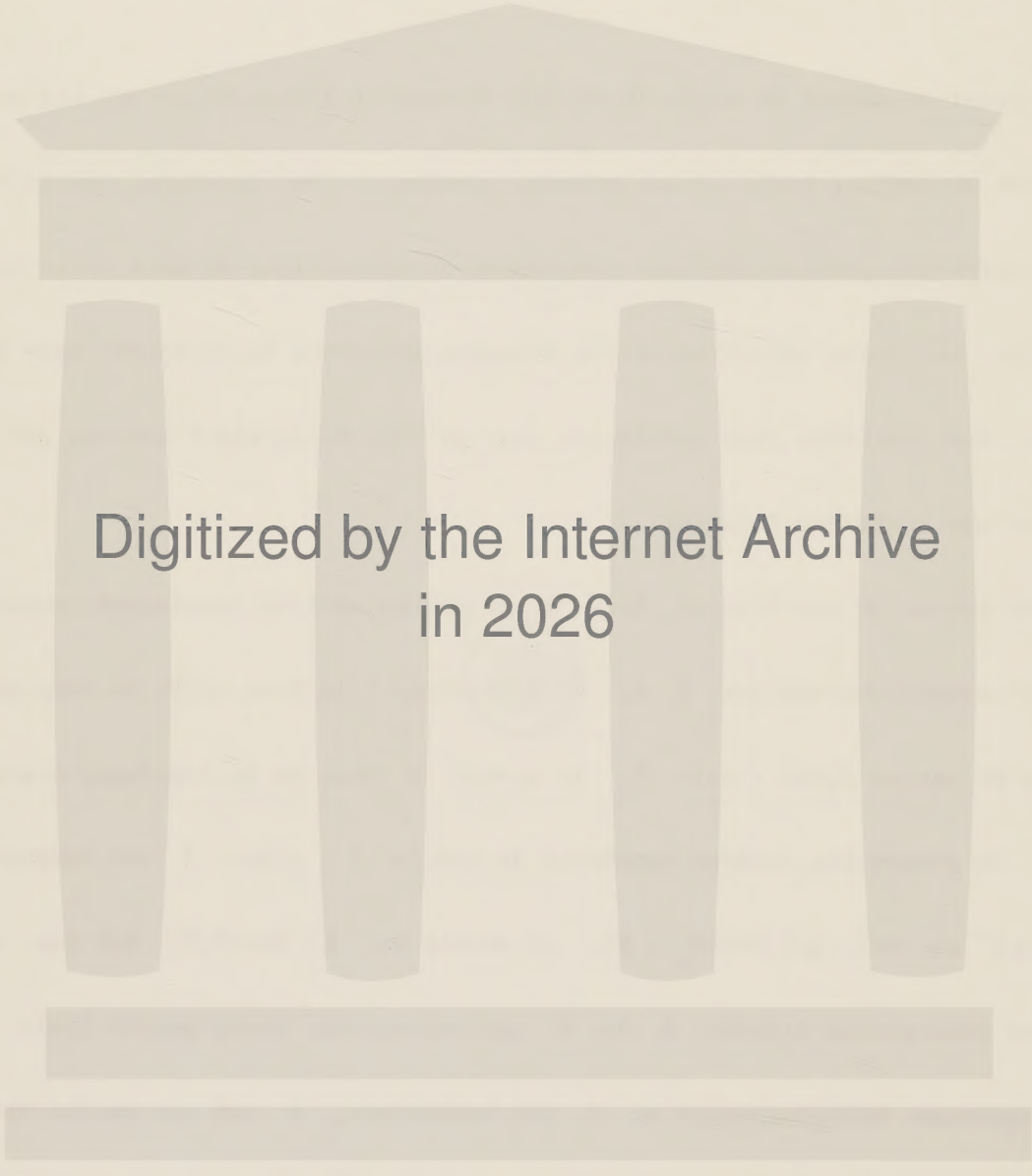
Introduction

Le point de départ de cette thèse fut le travail d'Yves Meyer sur les ensembles harmonieux de nombres réels et la synthèse spectrale. J'ai développé ces recherches dans le cadre des groupes abéliens localement compacts, leur donnant ainsi leur forme définitive. Les idées nouvelles et les méthodes employées fournissent, même dans le cas réel, des résultats plus précis que ceux qu'Yves Meyer avait obtenus par son approche basée sur l'algèbre linéaire.

Mais venons en aux détails. Soit G un groupe abélien localement compact. La notion d'ensemble harmonieux Λ de G généralise à la fois celle de sous-groupe discret et celle de partie finie : soit G_d le groupe G muni de la topologie discrète et soit $\mathbb{T}$ le groupe des nombres complexes de module 1 ; alors Λ est harmonieux si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\chi \in \mathrm{Hom}(G_d, \mathbb{T})$, il existe un $\xi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{T})$ tel que $\sup_{\Lambda} |\chi(\lambda)-\xi(\lambda)| \leqslant \varepsilon$.

Tout sous-groupe discret Λ de G est harmonieux, toute partie finie Λ de G est harmonieuse. Réciproquement si Λ est harmonieux, Λ est une partie discrète et $\Lambda-\Lambda$ est harmonieux.

L'étude des ensembles harmonieux et de leurs applications à la théorie des nombres et à l'analyse fonctionnelle est l'objet de ce travail.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549227_0033

Dans le chapitre I est donnée la caractérisation des ensembles harmonieux Λ de G qui n'ont pas de lacunes arbitrairement longues (il existe une partie compacte B de G telle que tout translaté $B + x$ de B rencontre Λ).

Le résultat le plus étonnant du chapitre II est le théorème :

"Soit Λ une partie discrète de G qui ne présente pas de lacunes arbitrairement longues. Alors les deux propriétés suivantes de Λ sont équivalentes

a) Λ est harmonieux

b) il existe une partie finie F de G telle que $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$. On dit alors que Λ est un modèle de G.

(Si $F = \{0\}$, b) exprime que Λ est un sous-groupe de G)."

Dans toute la suite K désigne un corps localement compact, non discret, de caractéristique 0. Le chapitre III décrit la structure très simple des ensembles harmonieux Λ non lacunaires contenus dans un espace vectoriel de dimension finie sur K. Enfin au chapitre IV nous montrons que si $\Lambda \subset K$ est harmonieux et stable par multiplication, les éléments de Λ sont des nombres de Pisot ou de Salem de K ou des racines de l'unité appartenant à un même corps de nombres algébriques.

Jusqu'ici ne sont étudiés que des problèmes additifs ou d'approximations diophantiennes. Maintenant nous montrons comment les ensembles harmonieux permettent d'atomiser les distributions sur les groupes tout comme, dans la résolution numérique des équations d'évolution, on remplace $\mathbb{R}$ par un sous-groupe $h\mathbb{Z}$ où $h > 0$ est très petit. Dans les corps p-adiques il n'y a pas de sous-groupes discrets mais il y a beaucoup d'ensembles harmonieux.

Ces méthodes, appliquées à $\mathbb{Q}_p$, donnent (chapitre VI) un théorème de synthèse spectrale pour des ensembles symétriques à rapport de dissection constant ; on voit bien à ce moment comment, dans un groupe dépourvu de sous-groupe discret, l'existence de modèles peut permettre d'atomiser les pseudo-mesures comme Carl Herz ([7]) l'avait fait, pour l'ensemble triadique de Cantor, en utilisant des progressions arithmétiques.

On peut aussi obtenir des résultats sur des ensembles d'unicité qui simplifient et prolongent les résultats de Françoise Bertrandias ([1]).

Enfin, dans un dernier chapitre, nous donnons quelques propriétés remarquables des sommes trigonométriques sur $\mathbb{Q}_p$ dont les fréquences appartiennent au modèle le plus élémentaire de $\mathbb{Q}_p$: l'ensemble $\mathbb{Z}(p^{-1}) \cap [0,1[$ des rationnels de la forme ap^{-n} (a et n entiers) compris entre 0 et 1. Les méthodes employées dans ce cas montrent bien l'intérêt de la notion de groupes associés (chapitre I, déf. 1) qui est à la base de notre caractérisation des ensembles harmonieux non lacunaires ; passant d'un groupe sur l'autre (ici de $\mathbb{Q}_p$ sur $\mathbb{R}$) on transforme un ensemble discret de fréquences (sur $\mathbb{Q}_p$) en un ensemble compact (sur $\mathbb{R}$) et inversement.

M. J.-P. Kahane, qui a dirigé mes premières recherches au sein de l'équipe d'analyse harmonique d'Orsay m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ; je l'en remercie vivement.

Sans l'aide patiente et amicale d'Yves Meyer, qui m'en a fourni le sujet, ce travail n'aurait jamais été mené à bien. Je suis très heureux de pouvoir lui exprimer ici ma gratitude.

Je dois aussi beaucoup à M. J. Deny qui a eu une grande influence sur mes études et mon travail.

Je suis très reconnaissant à M. J. Neveu de m'avoir proposé un second sujet et à M. J.-P. Serre d'avoir accepté de faire partie du jury.

J'ai eu la chance de bénéficier de la compétence et de la gentillesse de Mme Dumas qui a dactylographié le manuscrit : je l'en remercie chaleureusement.

Enfin doivent être associés à ce travail tous mes amis du bâtiment de mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay où j'ai beaucoup appris, et pas seulement des mathématiques.

Chapitre I

Groupes associés, modèles et ensembles harmonieux

Des problèmes d'approximations Diophantiennes sur des groupes G abéliens localement compacts généraux conduisent à la notion d'ensemble harmonieux. Ces ensembles, lorsqu'ils ne sont pas trop "rares", peuvent être construits explicitement en "associant" un autre groupe abélien localement compact à G.

1. Définitions

Définition 1. *Soient G et G' deux groupes abéliens localement compacts (a. l. c.) et soit D un sous-groupe discret de $G \oplus G'$, tel que le quotient $(G \oplus G')/D$ soit compact. Soit π (resp. π') la projection canonique de $G \oplus G'$ sur G (resp. G').*

a) *On dira que G' est D-associé (ou associé par D) à G si*

i) $\pi'(D)$ *est dense dans* G'.

ii) $G' \cap D = \{0\}$ *dans* $G \oplus G'$.

b) *Si on a de plus*

iii) $G \cap D = \{0\}$,

on dira que G' est proprement D-associé à G.

c) Si G' est D-associé à G et G est D-associé à G', on dira simplement que G et G' sont D-associés.

Enfin, nous dirons par abus de langage que G et G' sont associés s'il existe un sous-groupe D de $G \oplus G'$ tel que G et G' soient D-associés ; cette propriété fait jouer à G et G' deux rôles symétriques.

Proposition 1. Soit $D^\perp$ l'orthogonal de D ([20], 2.1.1) dans le dual $\hat{G} \oplus \hat{G'}$ de $G \oplus G'$.

a) Si G' est D-associé à G, $\hat{G'}$ est $D^\perp$ associé à $\hat{G}$.

b) G et G' sont D-associés si et seulement si G' est proprement D-associé à G et $\hat{G'}$ proprement $D^\perp$-associé à $\hat{G}$.

En effet, on remarque d'abord que $D^\perp$ est un sous groupe discret de $\hat{G} \oplus \hat{G'}$ (isomorphe au dual de $G \oplus G'/D$) et que $(\hat{G} \oplus \hat{G'})/D^\perp$ est compact. Ensuite la propriété i) de la définition 1,a), est équivalente à

i') $\hat{G'} \cap D^\perp = \{0\}$,

parce qu'un homomorphisme continu de groupes a. l. c. est injectif si et seulement si l'homomorphisme transposé a une image dense.

Toute la proposition 1 s'en déduit.

Exemples : a) Soit G un groupe abélien compact et soit G' un sous-groupe quelconque de G que nous munissons de la topologie discrète. Soit D le sous-groupe de $G \oplus G'$ constitué des couples (g', g') où $g' \in G'$ (G' et son image canonique

dans G étant confondus, par abus de notation). Alors G' est proprement D-associé à G.

Si G' est dense dans G, G et G' sont D-associés.

b) Inversement si G est un groupe discret et G' un compactifié de G, on voit que G et G' sont naturellement associés par un groupe isomorphe à G.

c) Soit n un entier positif et soit dans le groupe $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^n$ un sous groupe discret D, isomorphe à $\mathbf{Z}^{n+1}$, c'est-à-dire un réseau de $\mathbf{R}^{n+1}$. Si D se projette de manière injective et avec des images denses dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{R}^n$, les groupes $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$ sont D-associés. Ceci est le premier exemple de groupes associés, introduit et utilisé par Y. Meyer ([12]) et qui est à l'origine de notre travail.

d) Soit $\mathbf{Q}_p$ l'ensemble des nombres p-adiques muni de sa structure de groupe additif a. l. c.. Soit $\mathbf{Z}(p^{-1})$ le groupe des rationnels de la forme $\frac{a}{p^n}$ $(a \in \mathbf{Z},\ n \geqslant 0)$ et ses images canoniques dans $\mathbf{Q}_p$ et dans $\mathbf{R}$ que nous noterons encore $\mathbf{Z}(p^{-1})$. Soit alors D le sous-groupe de $\mathbf{R} \oplus \mathbf{Q}_p$ formé par les couples (h,h) où h décrit $\mathbf{Z}(p^{-1})$. Il est facile de voir que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}_p$ sont D-associés. Ceci est l'exemple de base qui sera étudié ensuite plus en détail. (chap. III et suivants).

Définition 2. Soit G' un groupe D-associé au groupe a. l. c. G. Pour toute partie relativement compacte K de G', posons

$$\Lambda^K = \pi\left\{(G \times K) \cap D\right\} = \left\{\pi(d)\ ;\ d \in D \quad \text{et} \quad \pi'(d) \in K\right\},$$

et appelons Λ^K le modèle défini par G sur K.

En général, nous appellerons modèle de G tout ensemble Λ^K du type précédent

défini par la donnée de G', D, K.

Dans l'étude des modèles, nous ferons usage de la terminologie suivante :

Définition 3. Nous dirons qu'une partie Λ d'un groupe a. l. c. est relativement dense dans G s'il existe un compact H de G pour lequel $\Lambda + H = G$ ([ ]).

Et pour plus de commodité, nous appellerons ensemble bien séparé de G ce qui est souvent appelé ensemble uniformément discret.

Définition 4. Soit Λ une partie d'un groupe a. l. c. G. S'il existe un voisinage de l'origine ω tel que, chaque fois que λ et λ' sont deux éléments distincts de Λ, $(\lambda + \omega) \cap (\lambda' + \omega)$ est vide, nous dirons que Λ est bien séparé (par ω).

Si une famille $(\Lambda_i)_{i \in J}$ de parties de G a tous ses éléments bien séparés par un même ω, nous dirons qu'elle est uniformément bien séparée.

On a alors, avec les notations de la définition 2 :

Proposition 2. a) Lorsque h parcourt G', les modèles Λ^{K+h} définis sur G sont uniformément bien séparés

b) Si K est d'intérieur non vide dans G', Λ^K est relativement dense dans G.

Démonstration. a) Remarquons d'abord que si l'élément h de G' est la projection $\pi'(d)$ d'un élément de D, on a $\Lambda^{K+\pi'(d)} = \Lambda^K + \pi(d)$. Comme $\pi'(D)$ est dense dans G', pour montrer le a) on peut se restreindre à faire varier h dans un voisinage compact $\mathcal{V}$ de l'origine et on est ramené à montrer que le modèle $\Lambda^{K+\mathcal{V}}$ est bien séparé.

Posant $K + \mathcal{V} = K'$, considérons le modèle $\Lambda^{K'} - \Lambda^{K'} = \Lambda^{K'-K'}$. Le groupe D étant discret dans $G \oplus G'$ et ne rencontrant G' qu'en 0, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de l'origine de G tel que $\mathcal{O} \times (K' - K')$ rencontre D seulement en 0. Il suffit alors de choisir le voisinage symétrique ω de manière que $\omega + \omega \subset \mathcal{O}$, pour que $\Lambda^{K'}$ soit bien séparé par ω.

b) Puisque $\pi'(D)$ est dense dans G', on peut se ramener par translation au cas où K est un voisinage de l'origine dans G'. Soit alors ω' un voisinage symétrique de l'origine dans G' tel que $\omega' + \omega' \subset K$ et soient H et H' des compacts de G et G' tels que $D + (H \times H') = G \oplus G'$.

Si alors $d_1, \ldots, d_n$ sont n éléments de D tels que

$$H' \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left[\omega' + \pi'(d_j)\right],$$

on a

$$D + \bigcup_{j=1}^{n} \left[(H - \pi(d_j)) \times \omega'\right] = G \oplus G'.$$

En posant alors $C = \bigcup_{j=1}^{n} \left[H - \pi(d_j)\right]$ et $\Gamma = C + C$, on obtient $\Lambda^K + \Gamma = G$, ce qui, Γ étant un compact de G, prouve le b).

Si le groupe G', D-associé à G, n'est pas proprement D-associé à G, les modèles Λ^K définis sur G sont invariants par le sous-groupe discret $G \cap D$ de G. Il y a donc dans ce cas une certaine imprécision dans la définition des modèles Λ^K, à un point de K correspondant plusieurs points de Λ^K ; par exemple, une partie de Λ^K n'est pas alors nécessairement un modèle défini par une partie de G'. Les constructions suivantes donnent le remède à cet état de choses.

2. Extensions de groupes associés

Proposition 3. *Si G' est proprement D-associé à G, il existe une extension G'' de G' par un groupe discret $\mathcal{C}$ telle que G et G'' soient associés par une extension $\mathcal{D}$ de D par $\mathcal{C}$.*

Soit S l'adhérence dans G du sous-groupe relativement dense $\pi(D)$ et soit E un sous-groupe quelconque de G ayant une projection $\mathcal{C}$ dense dans G/S. Notons $\mathcal{D}$ le groupe $E + \pi(D)$ sur lequel nous mettons la topologie discrète. Soit $\tilde{D}$ le sous-groupe du groupe a. l. c. $\mathcal{D} \oplus G'$, constitué par les couples $(\pi(d), -\pi'(d))$ où d décrit D ; alors $\tilde{D}$ est fermé et le groupe $G'' = \mathcal{D} \oplus G'/\tilde{D}$ est localement compact. Le groupe $\mathcal{D}$ s'identifie alors canoniquement à un sous-groupe dense de G'' et donc à un sous-groupe de $G \oplus G''$, noté encore $\mathcal{D}$, discret puisque $G \oplus G'$ est un voisinage ouvert de l'origine dans $G \oplus G''$ et que $\mathcal{D} \cap (G \oplus G') = D$. Ce sous-groupe est aussi relativement dense et il en résulte que G et G'' sont $\mathcal{D}$-associés.

Remarquons bien que cette construction dépend du choix, assez arbitraire, du groupe E.

Plus généralement soit G' un groupe D-associé à G, pas nécessairement proprement, et S l'adhérence dans G du groupe $\pi(D)$. Le groupe G' est encore D-associé à S et $\hat{G}'$ est, lui, proprement D^*-associé à $\hat{S}$, en notant D^* l'orthogonal de D dans $\hat{G}' \oplus \hat{S}$. On peut donc, par la proposition 3, construire une extension $\hat{G}''$ de $\hat{G}'$ et, par dualité, on trouve un groupe G'', extension par G' d'un groupe compact, tel que G'' et S soient associés. Mais alors G'' est proprement associé à S et

dont aussi à G. En appliquant à nouveau le proposition 3, on peut construire un groupe G''', extension de G'' par un groupe discret, tel que G et G''' soient associés.

En résumé :

Proposition 4. Si G' est D-associé à G, il existe un groupe compact, une extension G'' de ce groupe compact par G' proprement associée à G, et une extension G''' de G'' par un groupe discret telle que G''' et G soient associés.

En application des propositions 3 et 4 et de leur démonstration, on obtient :

Corollaire 1. Si G' est D-associé à G et si A^K est un modèle sur G défini par une partie K de G', il existe un groupe G''' tel que G''' et G soient associés par un groupe D', et une partie relativement compacte K' de G''' telle que A^K soit identique au modèle $A^{K'}$ défini sur G par K'.

Démonstration. En suivant les constructions de la proposition 4, on commence par relever K dans G'' dont G' est le quotient par un groupe compact. On obtient ainsi une partie relativement compacte de G'' qu'on injecte dans G''' dont G'' est un sous-groupe ouvert, ce qui fournit K'.

Corollaire 2. Toute partie d'un modèle est un modèle.

En effet, à partir du moment où G''' et G sont associés, à toute partie A du modèle $A^{K'}$ défini par cette partie relativement compacte K' de G''' correspond une partie L de K' telle que $A = A^L$.

Dans le même ordre d'idée, on a :

Proposition 5. Soit A une partie d'un groupe a. l. c. G et soit Φ un sous-groupe fini de G. Si l'image $\tilde{A}$ de A dans G/Φ est un modèle de G/Φ, A est un modèle de G.

Supposons en effet que G' et G/Φ soient associés par D et soit $\mathfrak{D}$ l'image réciproque dans G, par l'application quotient, de la projection de D dans G/Φ. L'application de $\mathfrak{D}$ dans G' définie par

$$\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}/\Phi \simeq D \longrightarrow G'$$

est un homomorphisme (non nécessairement injectif) d'image dense dans G'. Le groupe G' se trouve alors $\mathfrak{D}$-associé (non nécessairement proprement) à G. Et si le modèle $\tilde{A}$ de G/Φ était défini par une partie K de G', le modèle A^K défini sur G par le système $(G', \mathfrak{D}, K)$ contient A. Donc A est un modèle d'après le corollaire 2.

Proposition 6. Si A est un modèle du groupe a. l. c. G et F une partie finie de G, $A * F$ est un modèle.

Grâce aux corollaires 1 et 2, il suffit de faire la démonstration dans le cas où on a un groupe G' tel que G et G' soient D-associés, où $A = A^K$ pour une partie relativement compacte K de G' et où $F = \{0, a\}$, a étant un point quelconque de G.

Considérons le groupe A engendré par a dans G et, faisant jouer à A le rôle du groupe E dans le démonstration de la proposition 3, avec la même démarche

construisons un groupe $\mathfrak{D}$ isomorphe à $\pi(D) + A$ et un groupe G'' tel que G'' et G soient $\mathfrak{D}$-associés, G' étant un sous groupe ouvert de G''. Le point a de G est alors la projection sur G d'un point de $\mathfrak{D}$ qui se projette en a' sur G'. On obtient ainsi, en considérant la partie relativement compacte $K + \{0,a'\}$ de G'' :

$$\Lambda^K + \{0,a\} = \Lambda^{K+\{0,a'\}} .$$

Remarque. On retrouvera, au chapitre II, de manière moins constructive le résultat de la proposition 6, avec un peu plus de généralité.

3. Réduction de groupes associés.

A l'inverse de ce que nous avons fait au n° 2, nous allons montrer qu'on peut réduire un groupe G' associé à G à être le groupe $\mathbf{R}^n$ (pour $n \geqslant 0$).

Commençons par un lemme très évident :

Lemme 1. Si G' est D-associé (resp. proprement D-associé) au groupe a. l. c. G, si $\mathcal{O}$ est un sous-groupe ouvert et K un sous-groupe compact de G' :

a) $\mathcal{O}$ est associé (resp. proprement associé) à G

b) G'/K est associé à G, (resp. proprement associé à condition que $K \cap \pi'(D) = \{0\}$).

Cela étant, on sait ([ ] th. 2.4.1, p. 40) que tout groupe a. l. c. G' possède un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{R}^n \times K$, où n est supérieur ou égal à 0 et K est un sous groupe compact de G'. Il résulte alors immédiatement du lemme :

Proposition 7. Si G possède un groupe associé, il existe un entier n, positif ou nul, tel que $\mathbf{R}^n$ soit associé à G ($\mathbf{R}^0 = \{0\}$).

L'entier n de la proposition 7 n'est évidemment en rien caractéristique de G (cf. n° 1 exemple c)). Remarquons cependant que si $n = 0$, G est l'extension d'un groupe discret par un groupe compact.

Réciproquement, en complément des exemples du n° 1, on voit que si G est extension d'un groupe discret par un groupe compact, 0 est associable à G, et à l'aide de la proposition 4, on peut construire des groupes G' tels que G et G' soient associés.

Corollaire 3. Si G est un groupe de torsion, et si G possède un groupe G' associé, G est l'extension d'un groupe discret par un groupe compact.

En effet, si $\mathbf{R}^n$, avec $n > 0$, est D-associé à G, D, qui est isomorphe à un sous-groupe de G, contient d'autre part nécessairement des éléments d'ordre infini.

L'intérêt de ce corollaire est de montrer que l'existence, pour un groupe G donné, d'un groupe associé G', n'est pas automatique.

Toujours dans le sens des réductions de groupes associés on a :

Proposition 8. Si A^K est un modèle du groupe a. i. c. G et si H est un sous-groupe compact de G, la projection de A^K dans G/H est un modèle de G/H.

Appelant Δ le sous-groupe $D \cap (H \times G')$ de D (avec les notations du n° 1) et H'

le sous-groupe discret de G' : $H' = \pi'(\Delta)$, le groupe G'/H' est D/Δ-associé à G/H et la projection de Λ^K sur G/H est le modèle défini par la projection de K sur G'/H'.

Nous ne connaissons malheureusement pas la structure des groupes a. l. c. associables ; on dit que G est associable s'il existe un groupe a. l. c. G' tel que G et G' soient associés.

Le théorème 2 du § 4 nous donnera cependant une condition nécessaire et suffisante pour que G soit associable.

Un exemple de groupe a. l. c. non associable peut être trouvé dans [20], 2.4.7 en utilisant le corollaire 3 ci-dessus.

4. Modèles et ensembles harmonieux

Rappelons ([12]) qu'un ensemble Λ d'un groupe a. l. c. G est dit harmonieux si tout caractère faible de G (homomorphisme non nécessairement continu à valeurs dans le tore $\mathbf{T}$) est limite uniforme sur Λ de caractères continus.

Théorème 1. Un modèle Λ^K d'un groupe a. l. c. G défini par une partie relativement compacte K d'un groupe G' D-associé à G, est un ensemble harmonieux.

En effet, avec les notations du n° 1, la restriction à Λ^K d'un caractère faible sur G est déterminée par la donnée d'un caractère sur le groupe discret D, c'est-à-dire par un élément σ du dual $(\hat{G} \oplus \hat{G'})/D^{\perp}$ de D. Soit $\varepsilon > 0$ et soit V_ε l'ensemble des éléments χ' de G' vérifiant $\sup_{g' \in K} |(\chi', g') - 1| \leqslant \varepsilon$. Comme K est relativement

compact, V_ε est un voisinage de l'origine dans $\hat{G}'$ et donc, en désignant par $\tilde{\pi}'(D^\perp)$ la projection, dense dans $\hat{G}'$, de $D^\perp$, on a $\tilde{\pi}'(D^\perp) + V_\varepsilon = \hat{G}'$. Cela s'écrit encore

$$V_\varepsilon + D^\perp + \hat{G} = \hat{G} \oplus \hat{G}'$$

ce qui signifie en passant au quotient par $D^\perp$ que tout caractère faible σ sur Λ^K est somme d'un caractère fort $\chi \in \hat{G}$, et d'un caractère faible χ' appartenant à V_ε et on a

$$\sup_{\lambda \in \Lambda^K} |(\sigma,\lambda) - (\chi,\lambda)| \leqslant \varepsilon \ , \quad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque. Il résulte aussi de la démonstration que l'ensemble

$$M_\varepsilon = \left\{ \chi \in \hat{G} \ ; \ \sup_{\lambda \in \Lambda^K} |(\chi,\lambda) - 1| \leqslant \varepsilon \right\}$$

est un modèle de $\hat{G}$ $\left(M_\varepsilon = \Lambda^{V_\varepsilon}\right)$, à condition que V_ε soit relativement compact dans G' : c'est le cas si K est d'intérieur non vide.

A partir de cette remarque, nous allons donner une réciproque du théorème 1.

Théorème 2. Soit G un groupe a. l. c. métrisable[1] et Λ un ensemble harmonieux, relativement dense, de G. Alors G est un groupe associable et Λ est un modèle de G.

Le théorème 2 fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe a. l. c. métrisable G soit associable : c'est de contenir un ensemble harmonieux relativement dense. Cette dernière condition est la généralisation directe de la propriété : G contient un sous-groupe discret Λ tel que G/Λ soit compact.

---

(1) On verra au chapitre II que la métrisabilité de G n'est pas nécessaire.

Démonstration. Soit S le plus petit sous-groupe fermé de G contenant Λ, $\hat{S}$ son dual et $\tilde{\hat{S}}$ le compactifié de Bohr de $\hat{S}$. Soit V_c l'orthogonal, dans $\tilde{\hat{S}}$, du groupe engendré par Λ et soit $\sum$ le groupe compact $\tilde{\hat{S}}/V_o$. Dans $\sum$, soit pour ε fixé $0<\varepsilon<\sqrt{3}$:

$$V_\varepsilon = \left\{\chi \in \sum \; ; \; \sup_{\lambda\in\Lambda} |(\chi,\lambda) - 1| \leqslant \varepsilon\right\},$$

et soit $\mathcal{H}$ le groupe engendré par V_ε.

a) Remarquons d'abord que, puisque Λ est harmonieux, tout élément de $\sum$ est somme d'un élément de V_ε et d'un élément de $\hat{S}$. On a, par conséquent $\mathcal{H} + \hat{S} = \sum$.

b) D'autre part, il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{U}$ dans $\hat{S}$ tel que, dans $\sum$, on ait $V_\varepsilon \cap \mathcal{U} = \{0\}$. En effet, si T est un compact de S tel que $\Lambda + T = S$, et si $\mathcal{U}$ est choisi de sorte que

$$\sup_{\lambda\in T, \chi\in\mathcal{U}} |(\chi,\lambda) - 1| < \sqrt{3}-\varepsilon \; ,$$

on aura pour $\chi \in \mathcal{U} \cap V_\varepsilon$

$$\sup_{x\in S} |(\chi,x) - 1| < \sqrt{3} \; ,$$

ce qui entraine $\chi = 0$.

c) Considérons maintenant sur le groupe $\mathcal{H}$ la topologie $\mathcal{C}$ de la convergence uniforme sur Λ. Un système fondamental de voisinages de l'origine pour cette topologie est constitué par les ensembles $\mathcal{V}_n = V$, et la topologie $\mathcal{C}$ est séparée puisque $\bigcap_{n>0} \mathcal{V}_n = \{0\}$, d'après la définition de $\sum = \hat{S}/V_o$.

Puisque S est, par hypothèse, métrisable, $\hat{S}$ est dénombrable à l'infini et on

peut pour tout entier $n>0$ et tout voisinage compact $\mathcal{U}$ de l'origine dans $\hat{S}$ recouvrir $\sum$ par une suite de translatés de $\mathcal{U}+\mathcal{V}_n$. Il résulte alors du théorème de Baire que $\mathcal{U}+\mathcal{V}_n$ est un voisinage de l'origine dans $\sum$. La topologie induite sur V_ε par $\mathcal{C}$ est donc moins finie que la topologie induite sur V_ε par la topologie de $\sum$ et donc chaque $\mathcal{V}_n$ qui est compact dans $\sum$ est compact dans $\mathcal{H}$ muni de la topologie $\mathcal{C}$.

$(\mathcal{H}, \mathcal{C})$ est donc un groupe abélien localement compact.

d) Nous allons montrer maintenant que $\mathcal{H}$ est associé à $\hat{S}$. Soit D le groupe $\mathcal{H}\cap S$. Dans $\mathcal{H}$, D est dense puisque, pour tout $p>0$, $\hat{S}+\mathcal{V}_p=\sum$, ($\Lambda$ harmonieux).

Soit $\tilde{D}$ le sous-groupe de $\hat{S}\oplus\mathcal{H}$ formé des couples $(d, -d)$ où d parcourt D. Il résulte de b) que $\tilde{D}$ est un sous-groupe discret de $\hat{S}\oplus\mathcal{H}$. Le quotient $(\hat{S}\oplus\mathcal{H})/\tilde{D}$ s'applique bijectivement d'après a), et continuement d'après c), sur le groupe compact $\sum$ et est donc compact et isomorphe à $\sum$. Donc $\mathcal{H}$ est $\tilde{D}$-associé à $\hat{S}$.

L'ensemble $M_\varepsilon = V_\varepsilon \cap \hat{S}$ est alors le modèle défini sur $\hat{S}$ par le compact V_ε de $\mathcal{H}$. C'est donc, d'après le théorème 1 un ensemble harmonieux de $\hat{S}$, relativement dense puisque V_ε est par définition de la topologie un voisinage de l'origine dans $\mathcal{H}$.

e) D'après la proposition 1, le groupe $\hat{\mathcal{H}}$ est $\tilde{D}^\perp$-associé au groupe S. Soit W_ε le compact de $\hat{\mathcal{H}}$:

$$W_\varepsilon = \left\{ y\in\hat{\mathcal{H}} \ ; \ \sup_{\chi\in V_\varepsilon} |(y,\chi) - 1| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Montrons que Λ est contenu dans le modèle défini sur S par W_ε : un élément λ de Λ définit un caractère sur $\tilde{D}$ et donc un homomorphisme sur le sous-groupe dense de $\mathcal{H}$ constitué par $\mathcal{H} \cap \hat{S}$, à valeur dans le tore. Par définition des ensembles $\mathcal{V}_n = V_{\frac{\varepsilon}{2^n}}$, on a

$$\sup_{\chi \in \mathcal{V}_n \cap S} |(\lambda, \chi) - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n},$$

ce qui prouve que ce caractère est continu pour la topologie induite sur $\mathcal{H} \cap \hat{S}$ par la topologie de $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ se prolonge donc par continuité en un caractère continu sur $\mathcal{H}$ qui appartient à W_ε. Autrement dit, dans $S \oplus \hat{\mathcal{H}}$, l'élément λ de S est congru modulo $\tilde{D}^\perp$ à un élément de W_ε.

f) Nous avons obtenu que Λ est contenu dans un modèle défini sur S sous-groupe fermé de G. En appliquant le corollaire 2 et la proposition 4, on déduit qu'on peut trouver un groupe G' tel que G est G' soient associés et que Λ soit un modèle de G.

Remarque. Nous avons donné cette démonstration parce qu'elle illustre bien le rôle de la dualité dans la notion de modèle et d'ensemble harmonieux relativement dense. En particulier, on voit que :

Corollaire 4. *Si Λ est un ensemble harmonieux relativement dense d'un groupe a. l. c. G métrisable et séparable* (1) *et si ε est un réel $0 < \varepsilon < \sqrt{3}$, l'ensemble*

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ \chi \in \hat{G} \ , \ \sup_{\lambda \in \Lambda} |(\chi, \lambda) - 1| \leqslant \varepsilon \right\}$$

est un ensemble harmonieux et relativement dense de $\hat{G}$.

---

(1) Ces deux hypothèses sont en fait superflues, comme on le verra au chapitre II.

Il est bon aussi, pour certaines applications de remarquer que dans l'énoncé du théorème 2, l'hypothèse que Λ est relativement dense peut être affaiblie : si l'on reprend la démonstration, on voit que cette hypothèse sert uniquement à prouver que l'ensemble V_ε est bien séparé dans $\hat{S}$ ce qui peut être obtenu pour des ensembles pas trop lacunaires (cf. plus bas, chapitre III, proposition 1).

Nous énoncerons donc :

Corollaire 5. Soit G un groupe a. l. c. métrisable, Λ un ensemble harmonieux de G tel que l'ensemble M_ε des caractères χ de $\hat{G}$ vérifiant $\sup_{\lambda\in\Lambda} |(\chi,\lambda) - 1| \leqslant \varepsilon$ soit bien séparé dans $\hat{G}$ pour un ε positif. Alors Λ est un modèle de G.

Chapitre II

Modèles et pseudo sous-groupes

1. Définition. Si G est un groupe abélien, nous appelerons pseudo-sous-groupe de G toute partie Λ de G telle qu'il existe une partie finie F de G pour laquelle $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$.

En particulier un sous-groupe de G est un pseudo-sous-groupe.

L'intérêt, pour nous, de cette notion vient de ce que :

Proposition 1. Dans un groupe a. l. c. G, tout ensemble harmonieux relativement dense est un pseudo-sous-groupe de G.

En effet, si Λ est un ensemble harmonieux de G, les ensembles $\Lambda - \Lambda$ et $\Lambda - \Lambda - \Lambda$ sont harmonieux, par simple application de la définition. En particulier, l'ensemble $\Lambda - \Lambda - \Lambda$ est bien séparé (définition I,4) Parce que un ensemble harmonieux est toujours bien séparé comme on le voit sans peine ([12] p. 10).

Si H est un compact de G tel que $\Lambda + H = G$, l'ensemble $(\Lambda-\Lambda-\Lambda) \cap H$ est donc un ensemble fini F de G et on a donc

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F.$$

Ce chapitre est consacré à une réciproque de ce théorème :

Théorème 1. Dans un groupe a. l. c. G, tout pseudo-sous-groupe Λ, localement fini dans G, est un modèle du sous-groupe fermé S qu'il engendre dans G.

Avant de passer à la démonstration, remarquons que si le pseudo-sous-groupe Λ est relativement dense dans G, le sous groupe S sera a fortiori relativement dense dans G et un groupe G' D-associé à S sera ipso facto D-associé à G : Λ sera donc dans ce cas un modèle de G et on aura donc en toute généralité :

Théorème 2. Dans tout groupe abélien localement compact, les trois propriétés

i) Λ est un ensemble harmonieux relativement dense de G

ii) Λ est un pseudo-sous-groupe localement fini relativement dense de G

iii) Λ est un modèle relativement dense

sont équivalentes.

Démonstration du théorème 1. Supposant Λ non-vide (sinon le théorème est trivial) on peut se ramener au cas où $0 \in \Lambda$ en effectuant une translation convenable de Λ et en appliquant le proposition I,6. Cela posé, nous allons faire la démonstration dans le cas le plus intéressant où Λ est supposé de plus relativement dense dans G. Ensuite (n° 6) nous verrons comment on peut se débarrasser de cette hypothèse supplémentaire.

Mais d'abord deux lemmes fondamentaux.

2. Lemme 1 ([ ]). Soit φ une application continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$ et B un cube centré à l'origine dans $\mathbb{R}^m$, de côté b, tels que

$$\forall x,y\in\mathbf{R}^p, \quad \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x-y) \in B.$$

Il existe alors une application linéaire continue ℓ, unique, de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^m$ telle que $\varphi - \ell$ soit bornée ; et on a de plus

$$\forall x \in \mathbf{R}^p \ , \ \varphi(x) - \ell(x) \in B.$$

Démonstration.

a) On suppose d'abord $m = p = 1$. On commence par montrer que $\frac{\varphi(x)}{x}$ admet une limite lorsque x tend vers l'infini. En effet, pour tout $A > 0$ et tout entier $n > 0$, on a

$$\left|\frac{\varphi(nA)}{nA} - \frac{\varphi(A)}{A}\right| \leqslant \frac{b}{A}.$$

Et pour tout r dans $[0\ ,\ 1[$, on a $|\varphi((n+r)A) - \varphi(nA) - \varphi(rA)| \leqslant b$,

$$\left|\frac{\varphi((n+r)A)}{(n+r)A} - \frac{\varphi(nA)}{nA}\right| \leqslant \frac{b}{(n+r)A} + \frac{|\varphi(rA)|}{(n+r)A} + \frac{r}{n+r}\,\frac{|\varphi(nA)|}{nA}$$

$$\leqslant \frac{b}{(n+r)A} + \frac{|\varphi(rA)|}{(n+r)A} + \frac{(|\varphi(A)|+b)}{A}\,\frac{r}{n+r}.$$

En commençant par choisir A assez grand, puis N assez grand, on obtient donc, pour tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance :

$$\text{si } n_1 \text{ et } n_2 \geqslant N, \quad \left|\frac{\varphi((n_1+r_1)A)}{(n_1+r_1)A} - \frac{\varphi((n_2+r_2)A)}{(n_2+r_2)A}\right| \leqslant \varepsilon.$$

D'où une limite ℓ à $\frac{\varphi(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, et par $|\varphi(0)-\varphi(x)-\varphi(-x)| \leqslant b$, la même limite quand x tend vers $-\infty$.

On pose donc $\ell(x) = \ell x$, et il est facile de vérifier que $|\varphi(x) - \ell(x)| \in B$.

b) Dans le cas où m et p sont quelconques, on se ramène au cas précédent en raisonnant sur chaque coordonnée.

De la même façon on montre :

Lemme 2. Si φ est une fonction de $\mathbf{Z}^p$ dans $\mathbf{R}^m$ et B un cube centré à l'origine dans $\mathbf{R}^m$ tels que, pour tout x et y de $\mathbf{Z}^p$, on ait $\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x-y) \in B$, il existe un homomorphisme unique ℓ de $\mathbf{Z}^p$ dans $\mathbf{R}^m$ tel que $\varphi(x) - \ell(x)$ soit borné. Et on a de plus $\varphi(x) - \ell(x) \in B$.

Remarque. Au chapitre suivant, on utilisera des lemmes analogues dans les corps p-adiques.

3. Pseudo-sous-groupes relativement denses et localement finis de $\mathbf{R}^p$.

Soit A un cube de $\mathbf{R}^p$, $A = [-a\ ,\ a]^p$, dont tout translaté rencontre au moins un point du pseudo sous-groupe Λ. En recouvrant $\mathbf{R}^p$ avec les cubes $2A + (k_1 a, k_2 a, \ldots, k_p a)$ où $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ décrit le réseau $\mathbf{Z}^p$, on voit de proche en proche en partant de l'origine, que tout point de Λ appartient au sous-groupe de $\mathbf{R}^p$ engendré par $(\Lambda - \Lambda) \cap 2A$. Comme $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$, $\Lambda - \Lambda$ est localement fini et donc le groupe L, engendré par Λ, est de type fini.

Soit donc $\omega_1, \ldots, \omega_m$, $(m \geqslant p)$, des générateurs $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants de ce groupe, appartenant à 2A.

Identifiant $\omega_1, \ldots, \omega_m$ à une base de $\mathbf{R}^m$, on définit donc une projection π de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^p$ qui met en bijection $\mathbf{Z}^m$ et L. Inversement, on définit une application ψ de Λ dans $\mathbf{Z}^m$ en posant pour $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \rho_i(\lambda)\, \omega_i$, $(\rho_i(\lambda) \in \mathbf{Z})$,

$$\psi(\lambda) = \{\rho_1(\lambda), \ldots, \rho_m(\lambda)\}.$$

D'autre part, on peut paver $\mathbb{R}^p$ avec des $(p+1)$-simplexes choisis de manière que les sommets de ces simplexes soient tous les points de Λ et que si λ_1 et λ_2 sont des sommets d'un même simplexe, $\lambda_1 - \lambda_2$ appartienne à $2A$. La fonction ψ définie sur Λ se prolonge alors en une fonction φ continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$ et affine sur chaque simplexe du pavage ainsi défini.

Mais, comme l'ensemble $(\Lambda - \Lambda - \Lambda) \cap 6A$ est fini, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^m$ de la forme $\psi(\lambda_1) - \psi(\lambda_2) - \psi(\lambda_3)$, où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ appartiennent à Λ et où $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ appartient à $6A$, est fini et donc contenu dans un cube B centré à l'origine dans $\mathbb{R}^m$. En associant au point x de $\mathbb{R}^p$ (resp. aux points y et $x-y$) un sommet λ_x (resp. λ_y et λ_{x-y}) d'un simplexe dans lequel il se trouve, on obtient

$$\lambda_x - x \in 2A, \quad (\text{resp. } \lambda_y - y \in 2A \text{ et } \lambda_{x-y} - (x-y) \in 2A),$$

et donc

$$\lambda_x - \lambda_y - \lambda_{x-y} \in 6A.$$

Comme, d'autre part, $\varphi(x) - \psi(\lambda_x) \in B$, (resp. $\varphi(y) - \psi(\lambda_y) \in B$ et $\varphi(x-y) - \psi(\lambda_{x-y}) \in B$), on obtient finalement :

$$\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x-y) \in 4B, \text{ pour tout } x \text{ et tout } y \text{ de } \mathbb{R}^p.$$

On peut donc déduire du lemme 1 que φ est la somme d'une application linéaire continue ℓ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$ et d'une fonction bornée. La variété linéaire $\ell(\mathbb{R}^p)$ est de rang p puisque sa projection par π sur $\mathbb{R}^p$ est relativement dense et donc surjective.

Soit alors π' une projection de $\mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}^{m-p}$ parallèlement à $\ell(\mathbb{R}^p)$ et G' l'adhérence dans $\mathbb{R}^{m-p}$ du groupe $\pi'(\mathbb{Z}^m)$. Le groupe G' ainsi obtenu, isomorphe à $\mathbb{R}^{m-p-q} \times \mathbb{Z}^q$ $(0 \leqslant q \leqslant m-p)$ est alors $\mathbb{Z}^m$-associé à $\mathbb{R}^p$ par les deux projections π sur $\mathbb{R}^p$ et π' sur G'. Et par le choix même de π', on voit que la projection sur G' des points de $\mathbb{Z}^m$ se projetant en des points de $\mathbb{R}^p$ appartenant à Λ (c'est-à-dire la projection $\pi'(\psi(\Lambda))$ est bornée = Λ est donc un modèle de $\mathbb{R}^p$ défini par cette partie bornée de G'.

4. Cas où $G = \mathbb{R}^p \times K$, avec K groupe compact.

Le raisonnement est tout à fait analogue au précédent. On considère un "cube" A de $\mathbb{R}^p \times K$, $A = [-a\ ,\ a]^p \times K$, dont tous les translatés rencontrent au moins un point de Λ, et à l'aide des mêmes translations, on montre que Λ est contenu dans le groupe L de type fini engendré par $(\Lambda - \Lambda) \cap 2A$. Cette fois, L est isomorphe à $\mathbb{Z}^m \times \Phi$, où Φ est un groupe fini. Plus précisément, on peut dire que $L \cap K$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^q \times \Phi$ et que la projection de L sur $\mathbb{R}^p$ parallèlement à K est isomorphe à $\mathbb{Z}^{m-q}$ (avec $m-q \geqslant p$ et $q \geqslant 0$).

a) Commençons par étudier le cas où $\Phi = \{0\}$, c'est-à-dire où L est sans torsion.

Soit Λ_1 la projection de Λ sur $\mathbb{R}^p$. Du fait que $(\Lambda - \Lambda) \cap K$ est fini, le nombre de points de Λ se projetant sur un même point λ de Λ_1 est majoré uniformément par rapport à λ.

Soient aussi $\omega_1, \ldots, \omega_m$ des générateurs indépendants de L ordonnés de manière

que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ appartiennent à K, les autres se projetant en $\omega^*_{q+1}, \ldots, \omega^*_m$ sur $\mathbf{R}^p$. Comme au n° 3, on identifie $\omega_1, \ldots, \omega_m$ à une base de $\mathbf{R}^m$, mais cette fois on définit une application <u>multivoque</u> Ψ de Λ_1 dans $\mathbf{Z}^m$ en faisant correspondre au point $\lambda = \rho_{q+1}(\lambda)\omega^*_{q+1} + \ldots + \rho_m(\lambda)\omega^*_m$ de Λ_1 l'ensemble $\Psi(\lambda)$ de tous les m-uples d'entiers de la forme $\{\rho_1, \ldots, \rho_q, \rho_{q+1}(\lambda), \ldots, \rho_m(\lambda)\}$ et tels que

$$\rho_1\omega_1 + \ldots + \rho_q\omega_q + \rho_{q+1}(\lambda)\omega_{q+1} + \ldots + \rho_m(\lambda)\omega_m \in \Lambda.$$

Comme on l'a vu plus haut, pour chaque λ de Λ_1, $\Psi(\lambda)$ est un ensemble fini. Mieux encore, comme $(\Lambda - \Lambda - \Lambda) \cap 6A$ est fini $(6A = [-6a\ ,\ 6a]^p \times K)$, on a

(*) L'ensemble : $\left\{\cup(\Psi(\lambda_1) - \Psi(\lambda_2) - \Psi(\lambda_3))\ ;\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda_1,\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \in [-6a, 6a]^p\right\}$

est fini et contenu dans un cube B centré à l'origine dans $\mathbf{R}^m$.

Soit alors ψ une sélection quelconque de Ψ, c'est-à-dire une fonction (univoque) de Λ_1 dans $\mathbf{R}^m$ telle que, pour tout λ de Λ_1, $\psi(\lambda) \in \Psi(\lambda)$. Comme au n° 3 on peut alors prolonger ψ à $\mathbf{R}^p$ tout entier et montrer que ψ est somme de la restriction à Λ_1 d'une application linéaire continue ℓ_ψ et d'une fonction prenant ses valeurs dans $4B$.

Mais il résulte de la propriété (*) ci-dessus et de l'unicité de l'application ℓ_ψ donnée par le lemme 1 que si ψ_1 et ψ_2 sont deux sélections de Ψ, $\ell_{\psi_1} = \ell_{\psi_2}$. (A partir de ψ_1 et ψ_2, on construit une sélection "mélangée" ψ_3 coïncidant avec chacune des sélections ψ_1 et ψ_2 sur des ensembles relativement denses de $\mathbf{R}^p$: on voit alors que $\ell_{\psi_1} = \ell_{\psi_3}$ et $\ell_{\psi_2} = \ell_{\psi_3}$.)

Par conséquent, il existe une application linéaire continue ℓ de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^m$ et un cube 4B de $\mathbf{R}^m$ tels que Ψ soit la somme de la restriction à Λ_1 de ℓ et d'une application multivoque à valeurs dans 4B.

Une projection π' de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^{m-p}$, parallèlement à la variété linéaire $\ell(\mathbf{R}^p)$ envoie donc tous les points de $\mathbf{Z}^m$ correspondant à des points de Λ dans un ensemble borné de $\mathbf{R}^{m-p}$. Appelant alors G' la fermeture dans $\mathbf{R}^{m-p}$ de $\pi'(\mathbf{Z}^m)$, le groupe $\mathbf{Z}^m$ se trouve être discret et relativement dense dans $\mathbf{R}^p \times G'$ et donc dans $(\mathbf{R}^p \times K) \times G'$.

Par conséquent G' et $\mathbf{Z}^m$ associé à $\mathbf{R}^p \times K$ et Λ est un modèle.

b) Si Φ n'est pas réduit à $\{0\}$, on commence par faire le quotient de G par Φ. Dans G/Φ, l'image $\tilde{\Lambda}$ de Λ est un pseudo-sous-groupe localement fini, relativement dense et sans torsion ; d'après a) c'est un modèle et d'après la proposition I,5, $\Lambda + \Phi$ est un modèle et donc aussi Λ.

5. Cas où G est un groupe a. l. c. quelconque

Soit W un voisinage compact de l'origine, contenant F et tel que $\Lambda + W = G$, et soit $\mathcal{O}$ le sous-groupe ouvert de G engendré par K. Alors ([ ], chap. II, (9.8)) $\mathcal{O}$ est isomorphe à $\mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s \times K$ où K est un groupe compact et l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{O}} = \Lambda \cap \mathcal{O}$ est un pseudo-sous-groupe localement fini et relativement dense de $\mathcal{O}$. En plongeant $\Lambda_{\mathcal{O}}$ dans $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \times K$, les résultats du n° 4 donnent :

1) $\Lambda_{\mathcal{O}}$ engendre un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^m \times \Phi$, où Φ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}$.

2) On peut plonger $\mathbf{Z}^m$ dans $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$ de manière que l'image de Λ_σ (considéré comme partie de $\mathbf{Z}^m \times \Phi$) dans $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$ soit bornée.

En fait, comme au n° 4, on peut se débarrasser du groupe fini Φ en faisant le quotient de G par Φ et en ne remontant à G qu'à la toute dernière fin de la démonstration. Nous supposerons donc désormais que $\Phi = \{0\}$.

a) Soit L le groupe engendré par Λ, H le groupe engendré par Λ_σ (donc isomorphe à $\mathbf{Z}^m$), H' le groupe $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$ dans lequel nous savons plonger H (2^o) ci-dessus).

Munis de la topologie induite par celle de G, H est un sous-groupe ouvert du groupe topologique (non localement compact) L, et donc L/H est discret. L'idée de la suite est de construire une topologie sur L induisant sur H la topologie induite par H' et telle que cette fois L/H soit compact.

Pour faire cela, il serait évidemment commode de pouvoir factoriser H dans L. D'où la suite :

b) Soit L' le groupe (sans topologie) $\frac{H' \oplus L}{H^*}$, où H^* est le sous-groupe de $H' \oplus L$ constitué par les couples $(h, -h)$ où $h \in H$. On a alors

$$0 \longrightarrow H' \longrightarrow L' \longrightarrow L'/H' \simeq L/H \longrightarrow 0.$$

Mais H' étant divisible on peut le factoriser et écrire $L' \simeq H' \oplus L/H$. Le choix de cette factorisation devra être précisé (point e)) mais on peut d'ores et déjà construire le groupe associé à G :

c) topologies : Soit $\tilde{D}$ un compactifié du groupe L/H. Le groupe L se plonge alors injectivement dans $\mathbb{R}^{m-(s+r)} \times \tilde{D}$ par l'intermédiaire de L'. Soit G' l'adhérence de L dans $\mathbb{R}^{m-(r+s)} \times \tilde{D}$.

d) G' est L-associé à G : L se plonge injectivement dans G, injectivement et avec une image dense dans G', il reste à voir qu'il est relativement dense et discret dans $G \oplus G'$.

i) Si $\ell \in L$ est petit dans G, il appartient à σ ; s'il est petit dans σ et dans $\mathbb{R}^{m-(r+s)}$ il est nul parce que $\mathbb{R}^{m-(r+s)}$ est $(L \cap \sigma)$-associé à σ, par construction.

ii) Si C_1 est un compact de $\mathbb{R}^{m-(r+s)}$, et C_2 un compact de σ tels que $(C_1 \times C_2) + H = \mathbb{R}^{m-(r+s)} \times \sigma$, on voit que $\{(C_1 \times \tilde{D}) \times C_2\} + L = G \oplus G'$.

e) Il reste à bien choisir la factorisation de H' dans L' de manière à obtenir que l'image de Λ dans G' soit relativement compacte. Pour le faire, il faut définir une projection σ de L' dans H'. Comme $L + H' = L'$, il suffit de définir l'homomorphisme σ sur Λ, qui engendre L. On est donc conduit à définir $\sigma(\lambda)$ successivement pour tous les éléments de Λ, en surveillant par récurrence transfinie que $\sigma(\lambda)$ tombe bien dans un compact fixe.

A) Soit donc $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \notin H$. On va définir un homomorphisme σ du groupe $\mathrm{Gpe}[H, \lambda]$ engendré par H et λ, dans H', prolongeant l'injection canonique de H dans H' et appliquant tous les éléments μ de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[H, \lambda]$ dans le cube B centré à l'origine de H' $(H' \simeq \mathbb{R}^{m-(r+s)})$ contenant l'image canonique de $\Lambda_\sigma + F + F$ dans H'.

1er cas. Il existe un plus petit entier $N>0$ tel que $N\lambda\in H$. Il en résulte que, pour tout λ_j de $\Lambda\cap \mathrm{Gpe}[H,\lambda]$, $N\lambda_j\in H$. Comme

$$-N\lambda_j \in \Lambda - \underbrace{\Lambda - \ldots - \Lambda}_{N \text{ fois}} \subset \Lambda + \underbrace{F + \ldots + F}_{N \text{ fois}} \subset NB\ ,$$

il suffit de choisir pour $\sigma(\lambda)$ le divisé par N de $N\lambda$ dans H' pour obtenir un prolongement σ vérifiant pour chaque λ_j : $\sigma(\lambda_j)\in B$.

2ème cas. $j\lambda\in H$ entraine $j=0$.

Puisque Λ est relativement dense dans G et que O est ouvert, pour chaque j de $\mathbf{Z}$, on peut trouver un λ_j de Λ tel que

$$\lambda_j - j\lambda \in H.$$

Ces λ_j vérifient

$$\lambda_i - \lambda_j - \lambda_{i-j} = \left[i-j-(i-j)\right]\lambda \in H,$$

donc

$$\lambda_i - \lambda_j - \lambda_{i-j} \in H.$$

Comme, d'autre part

$$\lambda_i - \lambda_j - \lambda_{i-j} \in \Lambda - \Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F + F,$$

et que

$$F \subset H,$$

il en résulte que

$$\lambda_i - \lambda_j - \lambda_{i-j} \in B.$$

L'application φ de $\mathbf{Z}$ dans H' définie par $j \longmapsto \lambda_j - j\lambda$ est donc, d'après le lemme 2 somme d'un homomorphisme ℓ' et d'une fonction à valeurs dans B. En posant $\sigma(\lambda) = -\ell(1)$, on a $\sigma(\lambda_j) = \sigma(j\lambda) + \varphi(j) \in B$.

Et comme le choix des λ_j était quelconque dans $\mathrm{Gpe}[H,\lambda] \cap \Lambda$, il en résulte, grâce à l'unicité de l'homomorphisme ℓ donné par le lemme 2 que, pour tout μ de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[H,\lambda]$, on aura $\sigma(\mu) \in B$.

B) On va maintenant appliquer le lemme de Zorn. Pour cela soit V un sous-groupe de L contenant H et σ un homomorphisme de V dans H' vérifiant pour tout μ de V, $\sigma(\mu) \in B$. Soit λ un élément de Λ n'appartenant pas à V. Montrons qu'on peut étendre σ au groupe $\mathrm{Gpe}[V,\lambda]$ de façon que, pour tout μ de $\mathrm{Gpe}[V,\lambda]$, on ait encore $\sigma(\mu) \in B$.

1er cas. Il existe un plus petit entier $N > 0$ tel que $N\lambda$ appartienne à V. Il en résulte que pour tout λ de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[V,\lambda]$, $N\lambda_j$ appartient à V. Soit μ_N dans Λ tel que $\mu_N - N\lambda$ appartienne à H. Puisque

$$\Lambda - \underbrace{\Lambda - \ldots - \Lambda}_{N \text{ fois}} \subset \Lambda + \underbrace{F + \ldots + F}_{N \text{ fois}}$$

il en résulte

$$\mu_N - N\lambda \in (N-1)B.$$

En choisissant pour $\sigma(\lambda)$ le divisé par N dans H' de $N\lambda = \sigma(\mu_N)$, on obtient que

$$N\sigma(\lambda) \in (N-1)B + B, \quad \text{soit} \quad \sigma(\lambda) \in B.$$

De même, pour tout λ_j de $\mathrm{Gpe}[V,\lambda]$, puisque, dès que pour un μ_{N_j} de Λ on a $\mu_{N_j} - N\lambda_j \in H$, on a nécessairement $\mu_{N_j} - N\lambda_j \in (N-1)B$, donc $\sigma(\mu_{N_j}) - N(\sigma(\lambda_j)) \in (N-1)B$, soit $\sigma(\lambda_j) \in B$.

2ème cas. Si $j \in \mathbf{Z}$ et $j\lambda \in V$, alors $j = 0$.

A ce λ, on peut associer, comme au A), 2ème cas, un homomorphisme de $\mathrm{Gpe}[H,\lambda]$ dans H' tel que $\sigma(\lambda_j) \in B$ pour tout λ_j de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[H,\lambda]$. Il en résulte par addition un homomorphisme du groupe $\mathrm{Gpe}[V,\lambda]$ dans H'. Mais si maintenant on considère un élément $\lambda_{i,j}$ quelconque de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[V,\lambda]$, on peut trouver i dans $\mathbf{Z}$ et μ_j dans $\Lambda \cap V$ tels que

$$\begin{cases} \lambda_{i,j} - \lambda_i - \mu_j \in H \\ \lambda_i \in \Lambda, \text{ et } \lambda_i - i\lambda \in H. \end{cases}$$

Comme d'autre part

$$\lambda_{i,j} - \lambda_i - \mu_i \in \Lambda - \Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F + F$$

il en résulte

$$\lambda_{i,j} - \lambda_i - \mu_j \in B.$$

Cela fournit une majoration a priori de $\sigma(\lambda_{i,j})$: $\sigma(\lambda_{i,j}) \in B$. Mais alors, en raisonnant sur un élément μ quelconque de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[V,\lambda]$ comme on l'a fait sur λ, c'est-à-dire comme au A), 2ème cas, on déduit de l'unicité de l'homomorphisme ℓ du lemme 2 que l'homomorphisme qu'on trouverait serait égal à σ et que, par conséquent, $\sigma(\mu) \in B$.

c) On termine en prenant un couple (V,σ) maximal.

6. Pour achever de démontrer le théorème 1, il faut maintenant voir que l'hypothèse que le pseudo-sous-groupe Λ est relativement dense peut être supprimée.

Dans $\mathbf{R}^n$, nous appellerons "cylindre de rang p", pour $0 \leqslant p \leqslant n$, la somme d'une

sous-variété linéaire de dimension p et d'une partie bornée de $\mathbf{R}^n$. Nous utiliserons alors la proposition :

Proposition 2. Tout pseudo sous-groupe de $\mathbf{R}^n$ est contenu dans un cylindre dans lequel il est relativement dense.

Avant de donner la démonstration, élémentaire, de cette proposition, montrons comment elle s'applique au théorème 1. Reprenant le début de la démonstration (n° 5), supposant que Λ est localement fini dans G et que $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$, on considère un sous-groupe ouvert $\mathcal{O}$ de l'origine engendré par un voisinage compact contenant F, avec donc $\mathcal{O} \cong \mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s \times K$. L'ensemble $\Lambda_{\mathcal{O}} = \Lambda \cap \mathcal{O}$ se projette sur $\mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s$ en un pseudo-sous-groupe localement fini de $\mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s$. D'après la proposition 2, on peut donc trouver un sous-groupe discret Δ de $\mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s$, isomorphe à un certain $\mathbf{Z}^\alpha$, qui soit "transverse" à $\Lambda_{\mathcal{O}}$, et donc tel que $\Lambda_{\mathcal{O}} + \Delta$ soit un pseudo-sous-groupe localement fini et cette fois relativement dense dans $\mathcal{O}$.

Il s'ensuit que $\Lambda + \Delta$ est un pseudo-sous-groupe localement fini, puisque localement fini dans $\mathcal{O}$, qui contient F, et relativement dense dans l'ensemble des classes modulo $\mathcal{O}$ de G qui rencontrent Λ. Comme $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + \mathcal{O}$, ces classes sont les seules qui rencontrent le sous-groupe fermé de G engendré par Λ. La démonstration du n° 5 montre alors que $\Lambda + \Delta$ est un modèle dans ce sous-groupe et donc que Λ est un modèle de ce sous-groupe.

Démonstration de la proposition 2.

Soit donc Λ une partie de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$ où F est fini, avec, on peut le supposer $0 \in \Lambda$. On a donc aussi

$$\Lambda + \Lambda \subset \Lambda + F - F.$$

Soit B un cube centré à l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et contenant $F - F$.

Si Λ est borné, la proposition est démontrée avec $p = 0$.

Sinon, on peut trouver λ^1 dans Λ tel que $\lambda^1 \notin 2B$. Construisons alors une suite λ^1_n d'éléments de Λ de la manière suivante :

$$\lambda^1_2 \in (\lambda^1 + \lambda^1 + B) \cap \Lambda, \ldots,$$

$$\lambda^1_n \in (\lambda^1_{n-1} + \lambda^1 + B) \cap \Lambda, \ldots .$$

Et, par symétrie on définit la suite λ^1_{-n} par

$$\lambda^1_{-n} \in (-\lambda^1_n + B) \cap \Lambda.$$

Cette suite est contenue dans le cône C^1 formé par les droites issues de l'origine et rencontrant $\lambda^1 + B$, et elle se projette orthogonalement sur l'axe de ce cône en une suite $X^1 = (x^1_n)_{n \in \mathbf{Z}}$.

Ensuite, de deux choses l'une

a) Ou bien on peut trouver dans Λ un élément λ^2 tel que $\lambda^2 \notin 2B$, et tel que le cône C^2 engendré par $\lambda^2 + B$ ne rencontre C^1 qu'au point zéro.

b) Ou bien on ne peut pas.

Dans le deuxième cas cela implique que Λ est contenu dans un cylindre de rang 1 :

en effet, si on définit l'application φ^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ en posant $\varphi^1(x_n^1) = \lambda_n^1$ et en prolongeant par une fonction affine par morceaux continue, on obtient une fonction vérifiant, pour tout y, z de $\mathbf{R}$

$$\varphi^1(y) - \varphi^1(z) = \varphi^1(y - z) \quad 12B$$

(Si cela n'était pas vrai, en prenant des points x_r^1, x_s^1, x_t^1 voisins de y, z et $y-z$, on trouverait un point λ^2 voisin de $\lambda_r^1 - \lambda_s^1 - \lambda_t^1$ et qui vérifie la condition a)).

Cette fonction définit donc, d'après le lemme 1, un cylindre de rang 1 ; et si on est dans le cas b) on voit immédiatement que Λ est contenu tout entier dans un cylindre de même axe. Comme la suite $(\lambda_n^1)_{n\in\mathbf{Z}}$ est relativement dense dans un tel cylindre, il en est de même pour Λ.

Dans le premier cas a), on construit à partir de λ^2 une suite $(\lambda_n^2)_{n\in\mathbf{Z}}$ comme on l'a fait pour λ^1, et on définit la suite double $(\lambda_{n,m}^{1,2})_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ m\in\mathbf{Z}}}$ en choisissant $\lambda_{n,m}^{1,2}$ dans $\lambda_n^1 + \lambda_m^2 + B$. Cette suite double se projette sur le plan défini par 0, λ^1 et λ^2 en un ensemble relativement dense et se trouve dans le cône $C^1 + C^2$. On se trouve à nouveau dans l'alternative.

a) On peut trouver dans Λ un élément λ^3 tel que $\lambda^3 \notin 2B$ et tel que le cône C^3 engendré par $\lambda^3 + B$ ne rencontre $C^1 + C^2$ qu'en 0.

b) On ne peut pas.

Dans le second cas on montre comme précédemment que Λ est contenu dans un cylindre de rang 2 et est relativement dense dans ce cylindre.

Dans le premier cas on poursuit la construction.

Finalement on trouve bien que A est relativement dense dans un cylindre de rang $p < n$, ou bien est relativement dense dans $\mathbb{R}^n$ tout entier.

Chapitre III

Modèles dans les corps localement compacts

Nous allons caractériser (théorèmes 2 et 2' ci-dessous) les modèles des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps local.

1. Adèles et groupes associés.

Commençons par un rappel de définitions et propriétés classiques ([ ] Ch. IV).

Soit k un corps de nombres algébriques (extension finie de $\mathbb{Q}$). Pour une place ν sur k, soit k_ν le complété de k pour ν et r_ν la boule unité fermée de k_ν : si ν est une place finie, r_ν est le sous anneau compact maximal de k_ν.

Pour un ensemble fini P de places de k, contenant toutes les places infinies, on pose

$$k_A(P) = \prod_{i \in P} k_i \times \prod_{i \notin P} r_i ,$$

et pour un élément ν de P

$$k'_A(P, \nu) = \prod_{\substack{i \in P \\ i \neq \nu}} k_i \times \prod_{i \notin P} r_i .$$

Lorsque P varie, les $k_A(P)$ forment un système inductif d'anneaux localement compacts dont la limite inductive k_A est, par définition l'anneau des adèles de k.

Si, pour ν fixée, on note par $k_A'(\nu)$ la limite inductive des anneaux $k_A'(P,\nu)$, on a l'isomorphisme :

$$k_A \simeq k_A'(\nu) \times k_\nu .$$

Notons π_ν (resp. π_ν'), la projection canonique de k_A sur k_ν, (resp. sur $k_A'(\nu)$) définie par cet isomorphisme.

Le corps k se plonge canoniquement dans k_A et son image $\varphi(k)$ est un sous anneau dont nous rappelons quelques propriétés :

a) $\varphi(k)$ est discret et relativement dense dans k_A.

b) Pour chaque place ν, la restriction de π_ν à $\varphi(k)$ est injective (évident), et l'image de $\varphi(k)$ par π_ν' est dense dans $k_A'(\nu)$.

c) Il existe un homomorphisme continu, H, du groupe additif k_A dans le groupe $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tel que l'application qui à chaque élément a de k_A fait correspondre le caractère sur k_A défini par

$$x \longmapsto \exp 2i\pi H(a\,x)$$

soit un isomorphisme du groupe k_A sur son dual ; et tel que $H(a) = 0$ si et seulement si $a \in \varphi(k)$.

On notera H_ν la restriction de H à k_ν, considéré comme sous-groupe fermé de k_A.

De la propriété b) résulte immédiatement que la restriction de π_ν' à $\varphi(k)$ est injective et que l'image de $\varphi(k)$ par π_ν est dense. Par conséquent, d'après la définition 1 du chapitre I.

Proposition 1. Les groupes a. l. c. k_ν et $k_A^1(\nu)$ sont $\varphi(k)$-associés.

Cette proposition fondamentale se généralise facilement à d'autres cas :

1) On peut se donner un ensemble fini $(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_j)$ de places de k et considérer le groupe $k_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_j} = k_{\nu_1} \times k_{\nu_2} \times \ldots \times k_{\nu_j}$. Construisant de manière évidente un groupe $k_A^1(\nu_1,\ldots,\nu_j)$ tel que

$$k_A \simeq k_A^1(\nu_1,\ldots,\nu_j) \times k_{\nu_1,\ldots,\nu_j}$$

on déduit encore des propriétés a) et b) que $k_{\nu_1,\ldots,\nu_j}$ et $k_A^1(\nu_1, \ldots, \nu_j)$ sont

[illegible]

2) Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur k, en posant $E_A = E \otimes_k k_A$, $E_\nu = E \otimes_k k_\nu$, $E_A^1(\nu) = E \otimes_k k_A^1(\nu)$, et en désignant par $\varphi(E)$ l'image canonique $(\varphi(E) = E \otimes_k 1_{k_A})$ de E dans E_A, on obtient que les groupes a. l. c. E_ν et $E_A^1(\nu)$ sont $\varphi(E)$-associés.

3) Reprenant la proposition 1, on peut définir un modèle A^K sur k_ν à l'aide d'une partie relativement compacte K de $k_A^1(\nu)$. Mais, de par la définition même de la topologie de $k_A^1(\nu)$, il existe un ensemble fini P de places de k, (contenant toutes les places infinies), tel que l'ensemble relativement compact K soit contenu dans

$$k_A^1(P,\nu) = \prod_{\substack{i \in P \\ i \neq \nu}} k_i \times \prod_{i \notin P} r_i .$$

Soit $\mathcal{A}_P$ l'anneau des éléments x de k tels que $x \in r_i$ pour tout i n'appartenant pas à P, et $\varphi(\mathcal{A}_P)$ son image canonique dans $k_A(P) = k_A^1(P,\nu) \times k_\nu$. Des propriétés a) et b) ci-dessus il est facile de déduire que k_ν et $k_A^1(P,\nu)$ sont $\mathcal{A}_P$

associés.

En fait on peut encore passer au quotient par $\prod_{i \notin P} r_i$ (cf. Chap. I, lemme 1) et on obtient que $\prod_{\substack{i \in P \\ i \neq \nu}} k_i$ et k_ν sont associés par un groupe isomorphe à $\mathcal{A}_P$.

Le modèle Λ^K dont on était parti peut être ainsi défini à partir de groupes bien plus petits que $k_A^1(\nu)$ et k.

On peut encore aller plus loin : Soit I l'ensemble des places infinies de k ; un compact de $\prod_{\substack{i \in P \\ i \neq \nu}} k_i$ est contenu dans un sous-groupe ouvert de la forme $\prod_{\substack{i \in I \\ i \neq \nu}} k_i \times \prod_{\substack{i \in P \\ i \notin I,\, i \neq \nu}} b_i$, où b_i désigne un sous-groupe ouvert compact de k_i. On peut se restreindre à ce sous groupe ouvert puis passer au quotient par $\prod b_i$ (cf. Chap. I, lemme 1). Finalement, on arrive à associer k_ν et $\prod_{\substack{i \in I \\ i \neq \nu}} k_i$ par un groupe isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_P$ et à définir le modèle Λ^K de départ à partir d'un ensemble borné de $\prod_{\substack{i \in I \\ i \neq \nu}} k_i$. Comme $\prod_{\substack{i \in I \\ i \neq \nu}} k_i$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{R}^m$ (avec $m = [k:\mathbf{Q}]$ si $\nu \notin I$, ou $m = [k:\mathbf{Q}] - [k_\nu : \mathbf{R}]$ si $\nu \in I$) on retrouve dans ce cas particulier le résultat du chapitre I, proposition 7. En fait, la complication qu'il y a à définir précisément le sous groupe de $\mathcal{A}_p$ qui intervient enlève, en pratique, de l'intérêt à cette dernière construction.

Remarque. La notion d'adèle et les résultats précédents peuvent se formuler de même pour les corps k de fractions rationnelles sur un corps fini ([21], chap. IV). Or tout corps commutatif localement compact est iosmorphe au complété soit d'un corps de

nombres algébriques, s'il est de caractéristique zéro, soit au complété d'un corps de fractions rationnelles sur un corps fini s'il est de caractéristique non nulle.

On peut donc énoncer :

Théorème 1. Le groupe additif de tout corps commutatif localement compact possède des groupes associés.

Cependant, comme dans un groupe a. l. c. d'ordre borné les seuls ensembles harmonieux sont les parties des sous-groupes discrets (chap. I, corol. 3), l'étude des modèles dans les corps de caractéristique finie perd beaucoup d'intérêt : nous nous contenterons donc d'étudier les corps de nombres.

Exemple et notations. Si $k = \mathbf{Q}$, corps des nombres rationnels, à chaque nombre premier p correspond une place (notée encore p) et un complété $\mathbf{Q}_p$; pour un élément x de $\mathbf{Q}_p$ on notera $|x|_p$ la valeur absolue p-adique de x, normalisée par $|p|_p = \frac{1}{p}$. On notera ∞ la place archimédienne : $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$.

On notera $\mathbf{Z}_p$ (pour p premier) la boule unité fermée de $\mathbf{Q}_p$, ensemble des entiers p-adiques. Un élément a de l'anneau des adèles $\mathbf{Q}_A$ de $\mathbf{Q}$ est alors une suite $\mathbf{a} = (a_\infty, a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots)$ où $p_1, p_2, \ldots$ décrivent l'ensemble des nombres premiers, où $a_i \in \mathbf{Q}_i$ pour chaque i premier ou infini et où les a_p appartiennent presque tous à $\mathbf{Z}_p$.

D'autre part, pour un ensemble $\{p_1, p_2, \ldots\}$ de nombres premiers, on notera par $\mathbf{Z}(p_1^{-1}, p_2^{-1}, \ldots)$ l'anneau des rationnels appartenant à tous les $\mathbf{Z}_q$, pour q premier n'appartenant pas à $\{p_1, p_2, \ldots\}$. En particulier $\mathbf{Z}(p^{-1})$ désigne l'anneau des

rationnels représentables par une fraction ne comportant que des puissances de p au dénominateur.

Pour p premier, tout élément x de $\mathbb{Q}_p$ se décompose de manière unique ([1], p. 10) sous la forme

$$x = H_p(x) + \varepsilon_p(x)$$

avec $\varepsilon_p(x) \in \mathbb{Z}_p$ et $H_p(x) \in \mathbb{Z}(p^{-1}) \cap [0,1[$. Si l'on convient de noter pour un nombre réel x de partie entière $[x]$:

$$H_\infty(x) = [x] - x \quad , \quad (H_\infty(x) \in]-1,0]),$$

on peut expliciter l'homomorphisme H de l'anneau des adèles $\mathbb{Q}_A$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ cité au c) ci-dessus par

$$a \in \mathbb{Q}_A \quad , \quad H(a) = H_\infty(a_\infty) + \sum_{p \text{ premier}} H_p(a_p) \quad , \quad (\text{modulo } 1).$$

Enfin, d'après ce qui précède, on peut définir des modèles sur le groupe $\mathbb{Q}_p$ en lui associant le groupe $\mathbb{Q}_A^1(p)$ par $\mathbb{Q}$, ou simplement en lui associant un groupe $\mathbb{R} \times \prod_{i=1}^{m} \mathbb{Q}_{p_i}$ (où les p_i sont premiers et différents de p) par un groupe isomorphe au groupe $\mathbb{Z}(p^{-1}, p_1^{-1}, p_2^{-1}, \ldots p_m^{-1})$ défini ci-dessus.

2. Modèles dans le groupe $\mathbb{Q}_p^n$.

Nous venons de montrer comment on peut obtenir des groupes associés à $\mathbb{Q}_p$ (ou à un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$) et donc définir des modèles sur ce groupe. Nous allons maintenant donner une construction qui permet d'obtenir tous les modèles de $\mathbb{Q}_p$ ou d'un

produit $\mathbb{Q}_p^n$ et donc aussi de tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps p-adique.

L'entier n étant fixé, soit M un $\mathbf{Z}(p^{-1})$ module libre de dimension m, dense dans $\mathbb{Q}_p^n$ et appelons L_p l'injection canonique, considérée comme application $\mathbf{Z}(p^{-1})$-linéaire, de M dans $\mathbb{Q}_p^n$.

Soit d'autre part L'_p une application $\mathbf{Z}(p^{-1})$ linéaire de M dans $\mathbb{Q}_p^{m-n}$ telle que l'application $L_p \otimes L'_p$ de M dans $\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p^{m-n}$ soit de rang m sur $\mathbb{Q}_p$, c'est-à-dire que l'image d'une base du $\mathbf{Z}(p^{-1})$ module M soit une base du $\mathbb{Q}_p$ espace vectoriel $\mathbb{Q}_p^m$.

Soit de plus L_∞ une application $\mathbf{Z}(p^{-1})$-linéaire de M dans $\mathbb{R}^m$ qui soit de rang m sur $\mathbb{R}$.

Lemme 1. L'image D de M dans $(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p^{m-n}) \times \mathbb{R}^m$ par l'application $(L_p \otimes L'_p) \otimes L_\infty$ est un sous groupe discret relativement dense de $(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p^{m-n}) \times \mathbb{R}^m$.

Démonstration. En prenant comme nouvelle base de $\mathbb{Q}_p^m$ (resp. de $\mathbb{R}^m$), l'image par $L_p \otimes L'_p$ (resp. par L_∞) d'une base du $\mathbf{Z}(p^{-1})$-module M, D devient le sous groupe $\mathfrak{Z}^m(p^{-1})$ de $(\mathbb{Q}_p \times \mathbb{R})^m$ où $\mathfrak{Z}(p^{-1})$ désigne le sous groupe discret relativement dense de $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$, isomorphe à $\mathbf{Z}(p^{-1})$, formé des couples (r,r), $r \in \mathbf{Z}(p^{-1})$.

Considérons maintenant D comme sous groupe discret relativement dense de $\mathbb{Q}_p^n \times (\mathbb{Q}_p^{m-n} \times \mathbb{R}^m)$ et soit π et π' les projections de $\mathbb{Q}_p^n \times (\mathbb{Q}_p^{m-n} \times \mathbb{R}^m)$ sur $\mathbb{Q}_p^n$ et $(\mathbb{Q}_p^{m-n} \times \mathbb{R}^m)$ respectivement. Il est clair que $\pi(D) = M$ et est donc dense dans $\mathbb{Q}_p^n$,

l'application π étant de plus injective sur D.

L'application π', restreinte à D est aussi injective parce que l'application L_∞ est supposée de rang m sur $\mathbf{R}$ et est donc injective. En effet la restriction de π' à D, si l'on identifie D et M n'est autre que $L'_p \otimes L_\infty$.

Lemme 2. L'adhérence dans $\mathbf{Q}_p^{m-n} \times \mathbf{R}^m$ de $\pi'(D)$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{Q}_p^{m-n-k} \times \mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$, pour un entier k compris entre 0 et m-n.(*)

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_m$ une base du $\mathbf{Z}(p^{-1})$ module D, identifié à M. Soit k le plus grand entier tel qu'il existe k éléments : $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$, tel que $L'_p(\omega_{i_1}), \ldots, L'_p(\omega_{i_k})$ soient $\mathbf{Q}_p$-linéairement indépendants en engendre un $\mathbf{Q}_p$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}_p^{m-n}$ linéairement disjoint du $\mathbf{Q}_p$-sous-espace engendré par les autres $L'_p(\omega_j)$ $(j \neq i_1, \ldots, i_k)$.

En prenant $L_\infty(\omega_1), \ldots, L_\infty(\omega_m)$ comme base sur $\mathbf{R}$ de $\mathbf{R}^m$ et en utilisant le fait que le groupe $\mathbf{Z}(p^{-1})$ est discret dans $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R}$, on obtient le lemme 2.

Finalement, des lemmes 1 et 2 résulte que les groupes $\mathbf{Q}_p^n$ et $\mathbf{Q}_p^{m-n-k} \times \mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$ sont D-associés et on peut donc définir dans $\mathbf{Q}_p^n$ des modèles (contenus dans M) à partir de parties bornées de $\mathbf{Q}_p^{m-n-k} \times \mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$.

L'intérêt de cette construction est dans la réciproque :

Théorème 2. Tout modèle de $\mathbf{Q}_p^n$ peut être défini en associant, pour un certain entier m supérieur ou égal à n, et un entier k, $0 \leqslant k \leqslant m-n$, $\mathbf{Q}_p^{m-n-k} \times \mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$ et $\mathbf{Q}_p^n$ par un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}(p^{-1})^m$.

(*) Le groupe $\mathbf{Z}(p^{-1})$ est muni de la topologie discrète.

Soit, en effet, Λ un modèle défini sur $\mathbb{Q}_p^n$ par une partie relativement compacte K d'un groupe G' D-associé à $\mathbb{Q}_p^n$. On remarque d'abord :

Lemme 3. Si G' est un groupe D-associé à $\mathbb{Q}_p^n$, G' et $\mathbb{Q}_p^n$ sont D-associés.

Comme $\mathbb{Q}_p^n$ ne possède pas d'autre sous-groupe discret que $\{0\}$, G' est en effet nécessairement proprement D-associé à $\mathbb{Q}_p^n$ (cf. chap. I, §1). Et comme d'autre part $\mathbb{Q}_p^n$ n'a pas d'autre sous-groupe fermé relativement dense que lui-même, la projection de D sur $\mathbb{Q}_p^n$ est nécessairement dense et G' et $\mathbb{Q}_p^n$ sont D-associés.

On peut alors aisément trouver un entier relatif r et une partie relativement compacte K' de G' contenant K tels que le modèle Λ' défini sur $\mathbb{Q}_p^n$ par K' :

a) contienne le point 0

b) possède un point et un seul dans toute boule ouverte de rayon p^r de $\mathbb{Q}_p^n$.

Nous sommes ainsi ramenés à étudier la structure de Λ' qui est un pseudo-sous-groupe de $\mathbb{Q}_p^n$, puisque c'est un modèle relativement dense. Reprenons, en les précisant dans ce cas particulier, les méthodes du chapitre II.

Il existe un ensemble fini F, contenu dans la boule de rayon p^r centrée à l'origine tel que $\Lambda' - \Lambda' \subset \Lambda' + F$. Il résulte de cette relation que $p\Lambda' \subset \Lambda' + F'$, où F' est un ensemble fini. En appelant B une boule centrée à l'origine et contenant F', le $\mathbb{Z}(p^{-1})$ module M engendré par Λ' se trouve donc contenu dans le $\mathbb{Z}(p^{-1})$ module engendré par $F' \cup (B \cap \Lambda')$.

Tout point λ de Λ' peut par conséquent s'écrire de manière unique

$$\lambda = \rho_1(\lambda)\omega_1 + \ldots + \rho_m(\lambda)\omega_m, \quad \text{avec} \quad \rho_i(\lambda) \in \mathbf{Z}(p^{-1}).$$

Soit, pour ξ dans $\mathbf{Q}_p^n$, λ_ξ le point unique de Λ' vérifiant $|\xi - \lambda_\xi| < p^r$. Identifiant $\mathbf{Z}(p^{-1})$ avec le sous-groupe discret $\mathcal{Z}(p^{-1})$ de $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R}$, on définit une application continue de $\mathbf{Q}_p^n$ dans $(\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R})^m$ en posant pour tout point ξ de $\mathbf{Q}_p^n$

$$\varphi(\xi) = \left\{\rho_1(\lambda_\xi), \ldots, \rho_m(\lambda_\xi)\right\}.$$

Pour s et t dans $\mathbf{Q}_p^n$ il vient :

$$\varphi(s) - \varphi(t) = \varphi(\lambda_s) - \varphi(\lambda_t),$$

et comme $\lambda_s - \lambda_t$ appartient à $\Lambda' + F$, il existe un point λ_{s-t} et un seul de Λ' et un f de F tels que

$$\lambda_s - \lambda_t = \lambda_{s-t} + f.$$

D'où : $\varphi(\lambda_s) - \varphi(\lambda_t) = \varphi(\lambda_s - \lambda_t) + \psi_{s,t}$, où $\psi_{s,t}$ appartient à un certain ensemble fini fixe de $(\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R})^m$. Finalement

$$\varphi(s) - \varphi(t) = \varphi(s-t) + \psi_{s,t}.$$

On utilise alors les deux lemmes (cf. chap. II, lemmes 1 et 2) :

Lemme 4. Si g est une fonction continue de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$ et A une constante telles que $|g(x+y) - g(x) - g(y)|_p \leqslant A$ pour tout x et y de $\mathbf{Q}_p$, alors g est somme d'une fonction linéaire continue de $\mathbf{Q}_p$ dans lui-même et d'une fonction bornée.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$ et k entier positif on a

$$|g(kx) - kg(x)|_p \leqslant A,$$

et en posant $y = kx$, si $y \neq 0$

$$\left|\frac{g(y)}{y} - \frac{g(x)}{x}\right|_p \leqslant \frac{A}{|y|_p} .$$

Mais, si y est fixé différent de zéro, l'ensemble des $\frac{y}{k}$ où k décrit l'ensemble des entiers positifs est dense dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p \ ; \ |x|_p \geqslant |y|_p\}$. D'où il résulte :

$\forall y \in \mathbb{Q}_p$, $\forall x$ tel que $|x|_p \geqslant |y|_p$ on a :

$$\left|\frac{g(y)}{y} - \frac{g(x)}{x}\right|_p \leqslant \frac{A}{|y|_p} .$$

Finalement $\frac{g(x)}{x}$ tend vers une limite ℓ quand x tend vers l'infini. Si on pose alors $b(x) = g(x) - \ell x$, on a

$$|b(x+y) - b(x) - b(y)|_p \leqslant A ,$$

donc $\forall n \geqslant 0 \qquad \left|b(x) - p^n b\left(\frac{x}{p^n}\right)\right|_p \leqslant A.$

En faisant tendre n vers l'infini, $\frac{p^n}{x} b\left(\frac{x}{p^n}\right)$ tend vers zéro si $x \neq 0$ et donc

$$\forall x \neq 0 \qquad |b(x)|_p \leqslant A.$$

La décomposition cherchée est

$$g(x) = \ell x + b(x).$$

Lemme 5. Si f est une fonction continue de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{R}$ et A une constante telles que $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant A$, f est bornée.

Démonstration. On obtient pour tout y de $\mathbb{Q}_p$ et tout entier positif n :

$$\left|f(y) - n f\left(\frac{y}{n}\right)\right| \leqslant (n-1)A ,$$

soit

$$\left|\frac{f(y)}{n} - f\left(\frac{y}{n}\right)\right| \leqslant A.$$

En posant $B_\varepsilon = \sup_{|y|_p \leqslant \varepsilon} |f(y)|$, et en remarquant que l'ensemble $\left\{\frac{y}{n} \ ; \ |y|_p \leqslant \varepsilon \text{ et } n\right.$

entier positif $\}$ est dense dans $\mathbb{Q}_p$ on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_p \qquad |f(x)| \leqslant A + B_\varepsilon,$$

soit finalement

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p \qquad |f(x)| \leqslant A + f(0).$$

On décompose alors la fonction φ, à valeurs dans $(\mathbb{Q}_p \times \mathbb{R})^m$ en sa partie réelle φ_∞ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et sa partie p-adique φ_p, à valeurs dans $\mathbb{Q}_p^m$.

a) Soit L_∞ l'application $\mathbb{Z}(p^{-1})$-linéaire de M dans $\mathbb{R}^m$ qui coïncide avec φ_∞ sur Λ'. D'après le lemme 5, φ_∞ est bornée et donc L_∞ est bornée sur Λ'. D'autre part, L_∞ est de rang m par construction puisqu'elle applique la base $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ de M sur la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

b) D'après le lemme 4, $\varphi_p = \ell_p + b_p$ où ℓ_p est une application $\mathbb{Q}_p$ linéaire continue de $\mathbb{Q}_p^n$ dans $\mathbb{Q}_p^m$ et b_p une fonction bornée.

Montrons d'abord que la variété $\mathbb{Q}_p$-linéaire $\ell_p(\mathbb{Q}_p^n)$ est de dimension n : soit ρ l'application $\mathbb{Q}_p$ linéaire continue de $\mathbb{Q}_p^m$ dans $\mathbb{Q}_p^n$ qui à $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{Q}_p^m$ associe $\sum \xi_i \omega_i$ ($\{\omega_i\}_{i=1}^m$ est la base de M). Par définition même de φ, on a pour tout $\lambda \in \Lambda'$ $\rho(\varphi_p(\lambda)) = \lambda$ et comme $\varphi_p(\lambda) - \ell_p(\lambda)$ reste borné dans $\mathbb{Q}_p^m$ lorsque λ décrit Λ', $\rho(\ell_p(\Lambda'))$ est relativement dense dans $\mathbb{Q}_p^n$; donc $\rho(\ell_p(\mathbb{Q}_p^n)$ est $\mathbb{Q}_p^n$ tout entier et $\ell_p(\mathbb{Q}_p^n)$ est de dimension n sur $\mathbb{Q}_p$.

Soit alors σ la projection de $\mathbb{Q}_p^m$ sur le quotient $\mathbb{Q}_p^m/\ell_p(\mathbb{Q}_p^n)$ qui est isomorphe à (et identifié dans la suite avec) $\mathbb{Q}_p^{m-n}$. D'après ce qui précède le noyau de σ ne rencontre le noyau de ρ qu'en 0.

Soit enfin L'_p l'application $\mathbf{Z}(p^{-1})$-linéaire de M dans $\mathbf{Q}_p^{m-n}$ qui coïncide sur Λ' avec $\sigma \circ \varphi_p$ et L_p l'injection canonique de M dans $\mathbf{Q}_p^n$ qui coïncide donc avec $\rho \circ \varphi_p$ sur Λ'.

L'application $L_p \otimes L'_p$ (qui coïncide sur Λ' avec $(\rho \circ \sigma) \circ \varphi_p$) est une application de rang m, $\mathbf{Z}(p^{-1})$-linéaire, du module M dans $\mathbf{Q}_p^n \times \mathbf{Q}_p^{m-n}$. De plus L'_p est bornée sur Λ', puisque, sur Λ' $\sigma \circ \varphi_p = \sigma \circ b_p$.

c) Il résulte alors de l'étude directe faite plus haut qu'il existe un sous-groupe de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{Q}^{m-n}$, isomorphe à $\mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Q}^{m-n-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$ associé à $\mathbf{Q}_p^n$ et que Λ' est défini comme modèle à partir d'une partie relativement compacte de ce groupe.

Une autre façon d'énoncer le théorème 2 est la suivante :

Proposition 2. Si Λ est un modèle de $\mathbf{Q}_p^n$ alors :

1) Λ est contenu dans un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension m finie E.

2' Pour tout nombre premier q différent de p et pour $q = \infty$, on peut trouver m formes $\mathbf{Q}$-linéaires, $\mathbf{Q}_q$-indépendantes de E dans $\mathbf{Q}_q$, bornées sur Λ.

3' On peut trouver m-n applications $\mathbf{Q}$-linéaires de E dans $\mathbf{Q}_p$, bornées sur Λ et formant avec les restrictions à E des n projections canoniques de $\mathbf{Q}_p^n$ sur $\mathbf{Q}_p$ un système de m applications $\mathbf{Q}_p$-indépendantes.

Cette proposition, qui n'exprime qu'une condition nécessaire pour que Λ soit un modèle, se déduit aisément du théorème 2, l'appartenance à un $\mathbf{Z}(p^{-1})$ module de dimension m entrainant les conditions portant sur les valuations q-adiques ($q \neq p$).

2) A décomposer les applications L_∞ (à valeurs dans $\mathbf{R}^m$) et L'_p (à valeurs dans $\mathbf{Q}_p^{m-n}$) en m applications à valeurs dans $\mathbf{R}$ et m-n applications à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$.

3. Conclusion.

Les méthodes du paragraphe 2 s'appliquent exactement de la même manière à la recherche des modèles du groupe $\mathbf{R}^n$, le groupe $\mathbf{Z}(p^{-1})$ étant simplement remplacé par $\mathbf{Z}$, les lemmes 4 et 5 par le lemme 1 du chapitre II. On obtient ainsi les énoncés suivants de résultats obtenus antérieurement par Y. Meyer ([13] th. IV) :

Théorème 2'. Tout modèle de $\mathbf{R}^n$ peut être défini en associant, pour un certain entier m supérieur ou égal à n et un entier k, $0 \leqslant k \leqslant m-n$, $\mathbf{R}^{m-n-k} \times \mathbf{Z}^k$ et $\mathbf{R}^n$ par un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^n$.

Proposition 2'. Si Λ est un modèle de $\mathbf{R}^n$, alors :

1) Λ est contenu dans un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension m finie : E.

2) Pour tout nombre premier p on peut trouver m formes $\mathbf{Q}$-linéaires, $\mathbf{Q}_p$-indépendantes de E dans $\mathbf{Q}_p$, bornées sur Λ.

3) On peut trouver m-n applications $\mathbf{Q}$-linéaires de E dans $\mathbf{R}$, bornées sur Λ et formant avec les restrictions à E des n projections canoniques de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}$ un système de m applications $\mathbf{R}$-indépendantes.

En joignant à ces résultats la remarque déjà faite que les modèles dans les corps

locaux de caractéristique finie sont contenus dans un sous-groupe discret de ce corps, on obtient bien, finalement, la caractérisation des modèles dans tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps local.

Chapitre IV

Modèles standards et ensembles harmonieux stables par multiplication

Soit K un corps p-adique, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Pour un corps de nombres algébriques k qui se plonge de manière dense dans K, soit ν la place définie par k dans K : K s'identifie alors à k_ν et on peut, d'après le paragraphe 1 du chapitre III, définir un groupe $k'_A(\nu)$ associé à K par un groupe isomorphe à k. Soit U le compact de $k'_A(\nu)$ égal au produit des boules unités fermées de chacun des k_i, pour toutes les places i sur k différentes de ν.

Définition 1. On appellera modèle standard défini par k dans K le modèle Λ^U défini par U.

Autrement dit Λ^U est la partie de K constituée des λ de k vérifiant $|\lambda|_v \leqslant 1$ pour toute valeur absolue v sur k distincte de celle définie par K.

Un modèle standard, comme tout modèle, est un ensemble harmonieux ; il possède d'autre part la propriété d'être stable par multiplication ($\lambda \in \Lambda^U$ et $\lambda' \in \Lambda^U$ entraine $\lambda\lambda' \in \Lambda^U$. Le but de ce paragraphe est la démonstration du résultat inverse (théorème 2) : les modèles standards de K sont exactement les ensembles harmonieux stables par multipli-

tion et maximaux pour l'inclusion.

La notion de modèle standard est liée à celle de nombres de Pisot-Salem-Chabauty de K dont nous rappelons la définition : ([4] et [1]).

Définition 2. Soit K un corps p-adique. L'ensemble $S_p(K)$ des nombres de Pisot-Salem-Chabauty est l'ensemble des nombres algébriques θ de K tels que :

i) Pour la place induite sur $\mathbb{Q}(\theta)$ par K, θ est de valeur absolue strictement supérieure à 1.

ii) Pour toute autre place sur $\mathbb{Q}(\theta)$, la valeur absolue de θ est inférieure ou égale à 1.

Une autre façon d'exprimer les conditions i) et ii) consiste à introduire les isomorphisme $\sigma_1^q, \ldots, \sigma_n^q$ de $\mathbb{Q}(\theta)$ dans une clotûre algébrique Ω_q de $\mathbb{Q}_q$ (q premier ou ∞). Si $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_r^p$ sont les isomorphismes conjugués sur $\mathbb{Q}_p$, équivalents à l'injection canonique de $\mathbb{Q}(\theta)$ dans K, alors $\theta \in S_p(K)$ si et seulement si :

i) $|\sigma_1^p(\theta)|_p = |\sigma_2^p(\theta)|_p = \ldots = |\sigma_r^p(\theta)|_p > 1$

ii) $|\sigma_{r+1}^p(\theta)|_p \leqslant 1, \ldots, |\sigma_n^p(\theta)|_p \leqslant 1$

iii) $|\sigma_1^q(\theta)|_p \leqslant 1, \ldots, |{}^q_n(\theta)|_q \leqslant 1$, pour tout q différent de p.

On sait qu'on peut remplacer les conditions portant sur les places finies q-adiques (avec $q \neq p$) par la condition que θ est zéro d'un polynôme irréductible de la forme

$$p^{\alpha} x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \text{ où les } a_i \text{ appartiennent à } \mathbb{Z}.$$

Définition 3. Soit K un corps p-adique. L'ensemble $S_p^o(K)$ des nombres de Pisot-

Chabauty de K est l'ensemble des éléments θ de $S_p(K)$ qui sont de valeur absolue strictement inférieure à 1 pour toute place infinie sur K.

Soit K une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$ et soit S un ensemble harmonieux de K, stable par multiplication qui engendre K $\mathbb{Q}_p$-linéairement.

Proposition 1. L'ensemble S est contenu dans un modèle de K.

Un ensemble harmonieux est bien séparé ([12], § 2, cor. 1) et ne peut donc comporter qu'un nombre fini d'éléments de valeur absolue inférieure ou égale à 1. S'il est stable par multiplication ces éléments sont donc nécessairement soit zéro, soit racine de l'unité dans K.

Donc, de deux choses l'une : ou bien S est fini et la proposition 1 est évidente dans ce cas ; ou bien S est infini et contient au moins un élément θ de valeur absolue strictement supérieure à 1.

Soit, dans ce dernier cas, $x_1, \ldots, x_r$, une base de l'espace vectoriel K sur le corps $\mathbb{Q}_p(\theta)$, dont les éléments sont choisis dans S. Tout élément ω de K s'écrit donc $\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega_i x_i$, avec ω_i dans $\mathbb{Q}_p(\theta)$. Supposant que θ est de degré ℓ sur $\mathbb{Q}_p$ et zéro du polynôme irréductible primitif

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\ell} b_j x^j, \qquad (b_\ell = 1),$$

tout élément α de $\mathbb{Q}_p(\theta)$ peut s'écrire pour un entier n assez grand

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\ell-1} \alpha_j \theta^{j+n}, \quad \text{avec } \alpha_j \in \mathbb{Z}_p.$$

Donc nous pouvons écrire tout élément ω de K sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\ell-1} \omega_{i,j}\, x_i \theta^{j+n_i}, \quad \text{avec} \quad \omega_{i,j} \in \mathbf{Z}_p.$$

Cela posé, nous voulons appliquer le corollaire 5, chapitre I, et nous allons donc montrer que, pour ε positif assez petit, l'ensemble V_ε des caractères χ sur le groupe K vérifiant

$$\forall s \in S, \quad |(\chi, s) - 1| < \varepsilon$$

est bien séparé dans le dual $\hat{K}$ de K. Notant $\|y\|$ la distance du réel y à l'entier le plus proche et identifiant K à son dual (cf. chapitre III, § 1), il suffit de montrer que, pour ε assez petit l'ensemble des z de K vérifiant

$$\forall s \in S \quad \|H_p \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zs)\| < \varepsilon$$

est bien séparé dans K. Ou encore de montrer que pour ε assez petit il existe un η positif assez petit pour que

$$|z|_p < \eta \quad \text{et} \quad \|H_p \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zs)\| < 2\varepsilon \quad \text{pour tout } s \text{ de } S, \quad \text{entraîne } z=0.$$

Mais, ε positif étant donné, il existe $\eta > 0$ tel que $|z|_p < \eta$ entraîne $|\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(z\, x_i \theta^j)|_p \leqslant 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ et $0 \leqslant j \leqslant \ell-1$. Montrons que, pour $z \neq 0$, il existe un plus grand entier N tel que

$$\forall n < N, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant r, \quad |\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(z\, x_i \theta^n)|_p \leqslant 1.$$

S'il n'existait pas de tel N, on aurait pour tout ω de K

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(z\omega)|_p &= |\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p} z \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\ell-1} \omega_{i,j} x_i \theta^{n_i}|_p \\ &= |\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\ell-1} \omega_{i,j} \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p} z\, x_i \theta^{n_i}|_p \leqslant 1, \end{aligned}$$

ce qui est impossible pour $z \neq 0$.

Mais alors, comme

$$\theta^N = -\sum_{j=0}^{\ell-1} b_j \, \theta^{N+j-\ell},$$

on a, si $0 < |z|_p < \eta$, pour un certain indice i_o,

$$1 < |\mathrm{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zx_{i_o}\theta^N)|_p \leqslant \max_{0\leqslant j<\ell} |b_j|_p = c.$$

Cela est incompatible avec $\|H_p \, \mathrm{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zx_{i_o}\theta^N)\| < 2\varepsilon$ dès que 2ε est inférieur à p^{-c}.

(Rappelons que $x_{i_o}\theta^N \in S$ puisque S est stable par multiplication).

L'ensemble V_ε étant donc bien séparé l'application du corollaire 5, chapitre I achève la démonstration de la proposition.

De la proposition 1 et de la caractérisation des modèles de K donnée par le théorème 2, chapitre III, § 2, il résulte que l'ensemble S est contenu dans un $\mathbf{Z}(p^{-1})$-module libre de type fini, D, de dimension m. Il s'ensuit que le corps $\mathbf{Q}(s)$ engendré par S au-dessus de $\mathbf{Q}$ est une extension algébrique finie de $\mathbf{Q}$, de degré ν inférieur ou égal à m, d'après le

Lemme 1. Si X est une partie stable par multiplication d'une extension K d'un corps commutatif k et si X est contenu dans un k-espace vectoriel E de dimension finie m, le corps $k(X)$ est contenu dans E.

Soit donc k le corps $\mathbf{Q}(S)$. Le résultat principal s'énonce alors :

Théorème 1. L'ensemble S est contenu dans le modèle standard défini par k dans K.

Démonstration. Soient $\sigma_1^p, \sigma_2^p, \ldots, \sigma_\nu^p$ les $\mathbf{Q}$-isomorphismes du corps k dans une clôture algébrique Ω_p de $\mathbf{Q}_p$. On suppose que $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_n^p$ sont ceux qui se prolongent

en $\mathbb{Q}_p$-isomorphismes de K dans Ω_p, autrement dit ceux qui définissent sur k la même place que celle induite par K.

Pour tout p' premier différent de p et $p' = \infty$, soient $\sigma_1^{p'}, \ldots, \sigma_\nu^{p'}$ les $\mathbb{Q}$-isomorphismes de k dans une clôture algébrique $\Omega_{p'}$, $(\Omega_\infty = \mathbb{C})$, de $\mathbb{Q}_{p'}$, $(\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R})$.

Il nous faut alors montrer que :

$$\forall \lambda \in S \quad , \quad |\sigma_{n+1}^{p}(\lambda)|_p \leqslant 1, \ \ldots, \ |\sigma_\nu^{p}(\lambda)|_p \leqslant 1,$$

et $$\forall \lambda \in S, \quad \forall p' \neq p, \quad \forall i \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu, \quad |\sigma_i^{p'}(\lambda)|_{p'} \leqslant 1.$$

Mais pour tout p' (égal à p ou différent de p) les applications $\sigma_1^{p'}, \ldots, \sigma_\nu^{p'}$ qui sont $\mathbb{Q}$-linéaires sur k, sont indépendantes sur le corps $\Omega_{p'}$, et par conséquent toute application $\mathbb{Q}$-linéaire de k dans $\Omega_{p'}$, est combinaison linéaire à coefficients dans $\Omega_{p'}$, des $\sigma_1^{p'}, \ldots, \sigma_\nu^{p'}$.

Nous nous appuierons alors sur le lemme suivant, dont nous réservons la démonstration :

Lemme 2. Soit L une application $\mathbb{Q}$-linéaire de k dans $\Omega_{p'}$,

$$L = a_1\sigma_1^{p'} + \ldots + a_\nu \sigma_\nu^{p'} ,$$

bornée sur S. Si pour j, $1 \leqslant j \leqslant \nu$, on a $\sup_{y \in S} |\sigma_j^{p'}(y)|_{p'} > 1$, le coefficient a_j est nécessairement nul.

Terminons alors la démonstration du théorème 1. Dans le cas où S est fini, puisqu'il n'est constitué que de racines de l'unité (et de zéro éventuellement), il appartient certainement à l'ensemble standard défini par k dans K.

Reste le cas où S est infini et où il existe donc au moins un élément θ de S tel que pour les isomorphismes $\sigma_1^p, \ldots \sigma_n^p$, on ait

$$|\theta|_p = |\sigma_1^p(\theta)|_p = \ldots = |\sigma_n^p(\theta)|_p > 1.$$

D'après la proposition 1, S est contenu dans un modèle de K donc dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E de dimension m $(m \geqslant \nu = [k : \mathbb{Q}])$, et on peut trouver :

α) $m-n$ applications $\mathbb{Q}$-linéaires $L_1^p, \ldots L_{m-n}^p$ de E dans $\mathbb{Q}_p$, bornées sur S et n applications $\mathbb{Q}$-linéaires $L_{m-n+1}^p, \ldots, L_m^p$ de E dans $\mathbb{Q}_p$ pouvant se prolonger en applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires de K dans $\mathbb{Q}_p$; les applications $L_1^p, \ldots, L_m^p$ étant indépendantes de K dans $\mathbb{Q}_p$. Les applications $L_1^p, \ldots L_{m-n}^p$, induisent donc sur k des applications $\mathbb{Q}$-linéaires à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$ formant un système de rang $\nu-n$.

β) Pour tout p' différent de p, m applications $\mathbb{Q}$-linéaires de E dans $\mathbb{Q}_{p'}$, bornées sur S et C indépendantes. Ces applications induisent sur k des applications $\mathbb{Q}$ linéaires à valeurs dans $\mathbb{Q}_{p'}$, formant un système de rang ν.

D'après le lemme 2, les applications $L_1^p, \ldots, L_{m-n}^p$ (qu'on peut considérer comme à valeurs dans Ω_p en plongeant $\mathbb{Q}_p$ dans Ω_p) s'expriment comme combinaison linéaire à coefficients dans Ω_p de ceux des isomorphismes $\sigma_{n+1}^p, \ldots, \sigma_\nu^p$ qui sont bornés par 1 sur S. (Les isomorphismes $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_n^p$ n'interviennent pas puisqu'on sait déjà qu'ils ne sont pas bornés par 1 sur S). Comme le rang du système $L_1^p, \ldots, L_{m-n}^p$ est $\nu-n$, cela entraine que $\nu-n$ des isomorphismes $\sigma_{n+1}^p, \ldots, \sigma_\nu^p$, c'est-à-dire tous sont bornés par 1 sur S.

De même, les applications $L_1^{p'}, \ldots, L_m^{p'}$ s'expriment comme combinaison linéaire à coefficients dans $\Omega_{p'}$ de ceux des isomorphismes $\sigma_1^{p'}, \ldots, \sigma_\nu^{p'}$ qui sont bornés par 1 sur S ; c'est-à-dire de tous puisque le système $L_1^{p'}, \ldots, L_n^{p'}$ est de rang ν. Et cela pour tout $p' \neq p$.

Cela achève la démonstration du théorème, modulo la démonstration du lemme 2 que nous donnons maintenant :

La démonstration du lemme 2 se fait en deux parties :

a) Soit L bornée sur S à valeurs dans $\Omega_{p'}$ et soit $y \in S$. Montrons que, pour tout indice j_o tel que $|\sigma_{j_o}^{p'}(y)|_{p'} > 1$, la somme $\sum_{j \in J} a_j$ des coefficients de L étendue à l'ensemble J_o des indices tels que $\sigma_j^{p'}(y) = \sigma_{j_o}^{p'}(y)$ est nulle.

Regroupant les conjugués $\sigma_j^{p'}(y)$ égaux entre eux, on écrit pour tout exposant α entier

$$L(y^\alpha) = \Big(\sum_{\sigma_j^{p'}(y)=\sigma_{j_1}^{p'}(y)} a_j\Big)(\sigma_{j_1}^{p'}(y))^\alpha + \ldots + \Big(\sum_{\sigma_j^{p'}(y)=\sigma_{j_s}^{p'}(y)} a_j\Big)(\sigma_{j_s}^{p'}(y))^\alpha.$$

Soit, en simplifiant l'écriture $(\sigma_{j_1}^{p'}(y) = \rho_1$ etc.),

$$L(y^\alpha) = b_1\rho_1^\alpha + \ldots + b_s\rho_s^\alpha .$$

On peut aussi supposer que $|\rho_1|_{p'} \geqslant |\rho_2|_{p'} \geqslant \cdots \geqslant |\rho_s|_{p'}$. Il faut alors montrer que si $|\rho_1|_{p'} > 1$, alors b_1 est nul et ainsi de suite pour ρ_2, ..., jusqu'à épuisement, sinon du lecteur, du moins des ρ_i supérieurs à 1 en valeur absolue p'-adique.

Si $|\rho_1|_{p'} > 1$, il vient, en divisant par ρ_1^α

$$b_1 + b_2\frac{\rho_2^\alpha}{\rho_1^\alpha} + \ldots + b_s\frac{\rho_s^\alpha}{\rho_1^\alpha} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 0 \quad \text{dans } \Omega_{p'}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc dès que α est assez grand :

$$b_1 + b_2(\frac{\rho_2}{\rho_1})^\alpha + \ldots + b_s(\frac{\rho_s}{\rho_1})^\alpha = \varepsilon_1, \qquad |\varepsilon_1|_p < \varepsilon$$

$$b_1 + b_2(\frac{\rho_2}{\rho_1})^\alpha \frac{\rho_2}{\rho_1} + \ldots + b_s(\frac{\rho_s}{\rho_1})^\alpha \frac{\rho_s}{\rho_1} = \varepsilon_2, \qquad |\varepsilon_2|_{p'} < \varepsilon$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$b_1 + b_2(\frac{\rho_2}{\rho_1})^\alpha (\frac{\rho_2}{\rho_1})^{s-1} + \ldots + b_s(\frac{\rho_s}{\rho_1})^\alpha (\frac{\rho_s}{\rho_1})^{s-1} = \varepsilon_s, \qquad |\varepsilon_s|_{p'} < \varepsilon.$$

En résolvant le système linéaire en b_1, $b_2(\frac{\rho_2}{\rho_1})^\alpha$, ..., $b_s(\frac{\rho_s}{\rho_1})^\alpha$, on obtient $|b_1|_{p'} \leqslant C\varepsilon$ où C ne dépend que de $\rho_1, \ldots, \rho_s$.

Donc $b_1 = 0$ et ainsi de suite pour tous les b_j associés à des ρ_j vérifiant $|\rho_j|_{p'} > 1$.

b) Reprenant les hypothèses du lemme, supposons que, pour $x \in S$, $|\sigma_j(x)|_{p'} > 1$. Alors, pour tout y dans S, on peut appliquer le résultat de la partie a) de la démonstration à l'application $\mathbb{Q}$-linéaire de k dans Ω_p définie par :

$$x \rightsquigarrow L_y(x) = L(xy) = \sum a_i \sigma_i^{p'}(y) \sigma_i^{p'}(x).$$

Pour l'ensemble $j_1, \ldots, j_s$ d'indices pour lesquels $\sigma_{j_1}^{p'}(x) = \ldots = \sigma_{j_s}^{p'}(x) = \sigma_j^{p'}(x)$, on a

$$\sum_{i=1}^{s} a_{j_i} \sigma_{j_i}^{p'}(y) = 0, \quad \text{pour tout } y \text{ de } S.$$

Mais alors l'application $\mathbb{Q}$-linéaire de k dans $\Omega_{p'}$ définie par

$$y \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{s} a_{j_i} \sigma_{j_i}^{p'}(y)$$

est nulle sur S, donc nulle sur k qui est $\mathbb{Q}$-linéairement engendré par S. Les applica-

tions $\sigma_{j_i}^{p'}$ étant indépendantes il s'ensuit que $a_{j_i} = 0$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant s$, ce qui achève bien la démonstration du lemme 2.

Remarque. Supposons que S soit une partie harmonieuse stable par multiplication de l'extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, qui n'engendre pas nécessairement K $\mathbb{Q}_p$-linéairement. Soit K' le plus petit sous-corps fermé de K contenant S : K' est, lui, engendré $\mathbb{Q}_p$-linéairement par S d'après le lemme 1. Donc le théorème 1 s'applique à S et K' :

Corollaire 1. Tout ensemble harmonieux stable par multiplication d'une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ est contenu dans un modèle standard défini dans un sous-corps fermé de K.

2. Application aux nombres de Pisot-Salem-Chabauty de K.

Supposons que l'ensemble S considéré au § 1 soit de la forme particulière $S = \{\theta^n\}_{n \geqslant 0}$ où $\theta \in K$. Le corollaire nous permet d'affirmer que S est harmonieux si et seulement si θ appartient à un modèle standard d'un sous-corps fermé de K. Par définition même cela signifie que si $|\theta|_p > 1$, θ est un nombre de Pisot-Salem-Chabauty de K, ce qui nous permet d'énoncer (cf. [16] pour une autre démonstration de ce résultat) :

Corollaire 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{\theta^n\}_{n \geqslant 0}$ soit harmonieux dans l'extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ est que θ soit ou bien 0, ou bien une racine de l'unité ou bien un nombre de Pisot-Salem-Chabauty de K.

Plus loin, nous aurons à nous intéresser à des ensembles du type $T = \left\{\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k\right\}$ où les ε_k forment une suite finie de 0 ou de 1. Bien que T ne soit plus stable par

multiplication, les méthodes du n° 1 permettent de dire pour quelles valeurs de θ, T est un ensemble harmonieux de K.

Corollaire 3. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $T = \left\{\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k\right\}$ de K ($\varepsilon_k = 0$ ou 1 en nombre fini) soit harmonieux est que θ soit nul ou soit un nombre de Pisot-Chabauty de K.

Rappelons que θ est un nombre de Pisot-Chabauty de K si c'est un nombre de Pisot-Salem-Chabauty et si pour les isomorphismes σ_j^{∞} du corps $\mathbf{Q}(\theta)$ dans $\mathbf{C}$ on a $\left|\sigma_j^{\infty}(\theta)\right|_{\infty} < 1$.

Condition nécessaire. Puisque $\left\{\theta^n\right\}_{n\geqslant 0} \subset T$, il est déjà nécessaire que θ soit un nombre de Pisot-Salem-Chabauty d'après le corollaire 2 précédent. D'autre part, si on reprend la démonstration du théorème 1 avec ses notations, on voit que T est contenu dans un modèle (d'après le corollaire 5, chapitre I) et donc qu'il existe m applications $\mathbf{Q}$-linéaires à valeurs $\mathbf{R}$, définies sur un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel contenant T, $\mathbf{C}$-indépendantes et bornées sur T : $L_1^{\infty}, \ldots, L_m^{\infty}$. On a aussi que le degré ν de θ sur $\mathbf{Q}$ est inférieur ou égal à m. On peut donc exprimer chacun des $\mathbf{Q}$-isomorphismes de $\mathbf{Q}(\theta)$ dans $\mathbf{C}$, $\sigma_1^{\infty}, \ldots, \sigma_\nu^{\infty}$ comme combinaison linéaire à coefficients complexes dans L_i^{∞} :

$$\text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu : \qquad \sigma_j^{\infty} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} L_i^{\infty} .$$

Il en résulte que les σ_j^{∞} doivent être bornés sur T, et comme

$$\sigma_j^{\infty}\left(\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k\right) = \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k \left(\sigma_j^{\infty}(\theta)\right)^k ,$$

on a nécessairement $\left|\sigma_j^{\infty}(\theta)\right|_{\infty} < 1$.

Condition suffisante. Si θ est un nombre de Pisot-Chabauty, l'ensemble T est contenu dans le modèle standard défini par le corps $\mathbb{Q}(\theta)$ dans le sous-corps fermé $\mathbb{Q}_p(\theta)$ de K. Donc T est harmonieux.

3. Ensembles harmonieux stables par multiplication maximaux pour l'inclusion

Soit K un corps p-adique. Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 2. Les ensembles harmonieux stables par multiplication de K, maximaux pour l'inclusion sont les modèles standards de K.

A la lumière des résultats du paragraphe 1, il y a deux choses à montrer

a) Si K_1 est un sous-corps strict fermé de K, un modèle standard de K_1 est contenu dans un modèle standard de K.

En effet, soit S_1 un modèle standard de K_1 et $k_1 = \mathbb{Q}(S_1)$ qui est donc un sous-corps dense de K_1. Par hypothèse, K est une extension de degré supérieur à 1 du corps K_1 : soit $x \in K$ un élément primitif de cette extension et soit $k = k_1(x)$.

On a

$$[k : k_1] \leq [K : K_1].$$

Le corps k est dense dans K. Soit S le modèle standard défini par k dans K : montrons que $S_1 \subset S$. Il suffit pour cela de voir que si v est une place de k qui coïncide sur k_1 avec la place définie par K, elle coïncide sur k avec la place définie par K : cela résulte de ce qu'il n'y a qu'une seule place sur $K_1(x)$ prolongeant la place donnée sur K_1, puisque K_1 est complet pour cette place.

b) Si S_1 est un modèle standard de K, et S un modèle standard de K contenant S_1, alors $S = S_1$.

Soient $k = \mathfrak{Q}(S)$, $k_1 = \mathfrak{Q}(S_1)$, et supposons que K est plongé dans une clôture algébrique Ω_p de $\mathfrak{Q}_p$. Si k était strictement plus grand que k_1 il existerait un isomorphisme de k dans Ω_p différent de l'identité et laissant k_1 invariant. Un tel isomorphisme définit sur k une place $\mathfrak{p}'$ qui coïncide sur k_1 avec la place définie par K mais qui ne coïncide pas avec cette place sur k (sinon ce serait une isométrie qui laisserait k_1 invariant et donc aussi K puisque k_1 est dense dans K).

Pour un élément θ de S_1 appartenant à la classe $S_p(K)$ on aurait $|\theta|_{\mathfrak{p}'} \leqslant 1$ et θ ne peut pas appartenir au modèle standard S défini par k, ce qui est contradictoire avec $S_1 \subset S$.

Cela termine donc la démonstration du théorème 2.

Chapitre V

Les modèles et l'atomisation des distributions

Nous allons préciser, dans ce chapitre, quelques propriétés des modèles qui généralisent des propriétés que possèdent, en Analyse de Fourier, les sous-groupes discrets relativement denses des groupes a. l. c.. Nous aurons à utiliser des transformées de Fourier de mesures non bornées prises au sens des distributions tempérées sur un groupe localement compact ; nous rappelons donc dans les deux premiers paragraphes, et pour la commodité du lecteur, des notions classiques sur ces distributions.

1. Classe $\mathcal{S}(G)$ et distributions tempérées (cf. [3]).

Soit G un groupe abélien localement compact et $\hat{G}$ son dual. On considère les sous-groupes Γ de G engendrés par un voisinage compact de l'origine qui sont ([8], II th. 9.8) isomorphes à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^m \times K$ où m et n sont positifs ou nuls et où K est un sous-groupe compact de G. Pour chaque Γ, on considère les "bons sous-groupes" compacts k de Γ tels que Γ/k soit un groupe de Lie élémentaire de la forme $\mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^m \times \mathbf{T}^p \times \Phi$, où Φ est un groupe fini. Pour chaque couple (k, Γ) soit $\mathcal{S}(k,\Gamma)$ l'espace des fonctions sur G à support dans Γ, invariantes par k et qui, considérées comme fonctions sur Γ/k sont des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide ;

$\mathcal{S}(k , \Gamma)$ est muni de la topologie transportée de $\mathcal{S}(\Gamma/k)$. Enfin, soit $\mathcal{S}(G)$ la limite inductive des espaces $\mathcal{S}(k , \Gamma)$.

Par dualité, on voit facilement que si k_1 et k_2 sont des bons sous groupes de Γ, $k_1 \cap k_2$ est un bon sous-groupe de Γ et que l'intersection des bons sous-groupes de Γ est réduite à 0.

Il en résulte la

Proposition 1.

i) L'espace $\mathcal{S}(G)$ est une algèbre topologique.

ii) Si H est un compact de G et $\mathcal{V}$ un voisinage de l'origine dans G, on peut trouver une fonction de $\mathcal{S}(G)$, à valeurs dans $[0 , 1]$, valant 1 sur H et nulle hors de $H + \mathcal{V}$.

Pour montrer ii) il suffit de supposer $\mathcal{V}$ compact, de considérer un groupe Γ contenant H et $\mathcal{V}$ et un bon sous-groupe k de Γ tel que $k \subset \mathcal{V}$. On est ramené alors à chercher une fonction de $\mathcal{S}(\Gamma/k)$ valant 1 sur un compact et nulle en dehors d'un voisinage de ce compact.

On appelle distribution tempérée sur G un élément du dual fort $\mathcal{S}'(G)$ de $\mathcal{S}(G)$; nous aurons besoin de la propriété suivante :

Proposition 2.

a) Si μ est une mesure de Radon sur G telle que, pour tout compact H de G, on ait $\sup_{g \in G} |\mu|(H + g) < \infty$, alors $\mu \in \mathcal{S}(G)$.

b) Si $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ et si Λ_i est une famille uniformément bien séparée (chap. I, déf. 4) de parties de G, alors $\sup_i \sum_{\lambda \in \Lambda_i} |\varphi(\lambda_i)| < \infty$.

En effet, on vérifie en se ramenant aux groupes de Lie élémentaires que, si H est un compact de G et $(g_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de G telle que les compacts $(H + g_i)$ soient deux à deux disjoints, pour toute f de $\mathcal{S}(G)$ la famille $\left\{\sup_{x \in H+g_i} |f(x)|\right\}_{i \in I}$ est sommable.

Si μ vérifie les hypothèses de la proposition 2, a), cela entraine que, pour tout couple (k , Γ), μ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(k , \Gamma)$ et donc que $\mu \in \mathcal{S}'(G)$.

Le b) se montre de la même façon.

Si (k , Γ) est un bon couple de sous groupes de G, il en est de même, dans le groupe dual $\hat{G}$ de G, du couple $(\Gamma^{\perp} , k^{\perp})$ et la transformée de Fourier est alors un isomorphisme de $\mathcal{S}(k,\Gamma) \simeq \mathcal{S}(\Gamma/k)$ sur $\mathcal{S}(\Gamma^{\perp},k^{\perp}) \simeq \mathcal{S}(\widehat{(\Gamma/k)})$. Par transposition on définit la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'$, et, en particulier, la transformée de Fourier des mesures μ de la proposition 2.

Remarque. Une mesure de Haar m étant donnée sur G, on munira toujours $\hat{G}$ de la mesure duale pour laquelle la transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(G)$ sur $L^2(\hat{G})$.

2. Formule sommatoire de Poisson

Dans le groupe a. l. c. G, soit F un sous-groupe fermé de G et $F^\perp$ son orthogonal dans $\hat{G}$. Soit m_F une mesure de Haar sur F ; alors on a (Formule sommatoire de Poisson) :

Proposition 3. La mesure m_F appartient à $\mathcal{S}'(G)$ et sa transformée de Fourier est une mesure de Haar de $F^\perp$.

Si m_G est la mesure de Haar de G, pour toute fonction f de $\mathcal{S}(G)$, la fonction F, définie sur G/F par

$$F(x) = \int_F f(x + t)dm_F(t) ,$$

appartient à $\mathcal{S}(G/F)$. Pour un choix convenable d'une mesure de Haar $m_{G/F}$ sur G/F, on a, pour tout caractère γ de $F^\perp$,

$$\begin{aligned}\hat{F}(\gamma) &= \int_{G/H} (\gamma , x)\Big(\int_F f(x+t)dm_F(t)\Big)dm_{G/F}(x) \\ &\quad - \int_G (\gamma , x)\, f(x)dm_G(x) \\ &= \hat{f}(\gamma).\end{aligned}$$

Et en appliquant la formule d'inversion de Fourier avec un bon choix de la mesure de Haar $m_{F^\perp}$ sur $F^\perp$, il vient

$$\int_{F^\perp} \hat{f}(\gamma)(\gamma , -x)dm_{F^\perp}(\gamma) = \int_F f(x+t)dm_F(t),$$

ce qui, pour $x = 0$, prouve que $m_{F^\perp} = \hat{m}_F$.

Nous utiliserons essentiellement cette formule sommatoire dans le cas où F est un sous-groupe discret relativement dense de G, donc $F^\perp$ aussi discret et relativement dense

dans $\hat{G}$. Dans ce cas il est naturel de prendre des mesures de Haar sur F et sur $F^{\perp}$ qui donnent la masse 1 à chaque point, et on trouve $\hat{m}_F = c\, m_{F^{\perp}}$, où $\frac{1}{c}$ est la mesure de Haar d'un borélien quelconque de G tel que $(B - B) \cap F = \{0\}$ et $F + B = G$; (B est un domaine fondamental de F).

3. Modèles et formule de Poisson avec reste

Soit désormais G' un groupe D-associé au groupe a. l. c. G et K une partie relativement compacte de G'. Soit ρ la mesure portée par le modèle Λ^K, défini sur G par K, et donnant la masse 1 à chaque point de Λ^K. Nous allons voir qu'on peut ajouter à ρ une mesure α de manière que $\rho + \alpha$ soit une mesure tempérée dont la transformée de Fourier est une mesure.

Soit ν_D la mesure de Haar normalisée de D ($\nu_D(\{0\}) = 1$. Pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(G')$ soit $\tilde{\varphi}$ la fonction définie sur $G \oplus G'$ par $\tilde{\varphi}(x , x') = \varphi(x')$ ($\tilde{\varphi} = 1 \otimes \varphi$).

Lemme 1. Pour tout compact H de G, on a

$$\sup_{g \in G} \sum_{\substack{d \in D \\ \pi(d) \in H+g}} |\varphi(\pi'(d))| < \infty .$$

Soit en effet $L^{H+g} = \pi'\{[(H+g) \times G'] \cap D\}$. Bien que G n'ait pas été supposé D-associé à G' et que, par conséquent, L^{H+g} ne soit pas à proprement parler un modèle au sens de la définition 2 du chapitre I, on vérifie aisément que la démonstration de la proposition 2 du chapitre I s'applique et que la famille $\{L^{H+g}\}_{g \in G}$ de parties de G' est uniformément bien séparée dans G'. Le lemme 1 se déduit alors de la proposition 2, b).

Définition 1. Pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(G')$ on appellera mesure définie par φ sur G la mesure μ portée par $\pi(D)$ telle que

$$\mu(\{\pi(d)\}) = \varphi(\pi'(d)).$$

C'est bien une mesure qui appartient à $\mathcal{S}'(G)$, d'après le lemme 1 et la proposition 2.

C'est la projection sur G de $\tilde{\varphi}\nu_D$, vérifiant pour toute fonction ψ de $\mathcal{D}(G)$:

$$\int \psi \, d\mu = \int \psi \otimes \varphi \, d\nu_D .$$

Les mesures de Haar m (resp. m') sur G (resp. G') étant fixées, soit $\frac{1}{c}$ la mesure d'un domaine fondamental du sous groupe D dans $G \oplus G'$. On a alors :

Proposition 4. La transformée de Fourier de la mesure tempérée μ définie par φ sur G est la mesure $c\mu^*$, où μ^* est la mesure sur $\hat{G}$ définie par la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ de φ.

Rappelons (Chapitre I, prop. 1) que si G' est D-associé à G, $\hat{G}'$ est $D^\perp$-associé à $\hat{G}$.

En effet, on a

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\hat{G}) \quad , \quad \int \psi \, d\hat{\mu} = \int \hat{\psi} \, d\mu = \int \varphi \otimes \hat{\psi} d\nu_D$$
$$= \int \hat{\varphi} \otimes \psi \, d\hat{\nu}_D .$$

Mais, d'après la Formule de Poisson (prop. 3) $\hat{\nu}_D$ vaut $c\nu_{D^\perp}$ ($\nu_{D^\perp}$ est la mesure de Haar normalisée de $D^\perp$). Donc

$$\int \psi \, d\hat{\mu} = \int \hat{\varphi} \otimes \psi \, d\nu_{D^\perp} ,$$

ce qui prouve la proposition 4.

Revenant maintenant au modèle Λ^K de G défini par la partie relativement compacte K de G', soit $\mathcal{V}$ un voisinage compact de l'origine dans G' et soit φ une fonction de $\mathcal{D}(G')$ valant 1 sur K et nulle hors de $K + \mathcal{V}$. La mesure μ définie par φ sur G se décompose en $\mu = \rho + \alpha$ où ρ donne la masse 1 à chaque point de Λ^K et où α est une mesure portée par le modèle $\Lambda^{K+\mathcal{V}} \setminus \Lambda^K$.

La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ est bien une mesure (proposition 4) ; la mesure γ qui joue le rôle d'un reste pourra en un certain sens être rendue "petite" comme nous le verrons dans la suite (§ 5).

Remarque. La définition 1 et la démonstration de la proposition 4 font apparaitre que,

pour définir la mesure μ et pour obtenir que $\check{\mu}$ soit une mesure, il n'est pas nécessaire d'imposer à φ d'appartenir à $\mathcal{D}(G')$ mais qu'il suffit que $\hat{\varphi}$ ait la propriété de décroissance à l'infini suivante :

Pour toute famille $(\Lambda_i)_{i\in I}$ de parties de $\hat{G}'$, uniformément bien séparé,

$$\sup_I \sum_{\lambda\in\Lambda_i} |\hat{\varphi}(\lambda)| < \infty .$$

On pourrait par exemple prendre pour φ le produit $f * g$ où, pour un voisinage de l'origine $\mathcal{W}$ dans G' tel que $\mathcal{W} + \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, f serait la fonction caractéristique de $K + \mathcal{W}$ et g la fonction caractéristique de $\mathcal{W}$ divisée par la mesure de $\mathcal{W}$. Cela d'après le lemme :

Lemme 2. Si f et g sont deux fonctions de $L^2(G')$, à support compact,

$$\sup_{i\in I} \sum_{\lambda\in\Lambda_i} |\hat{f}(\lambda)\,\hat{g}(\lambda)| < \infty$$

pour toute famille Λ_i uniformément bien séparée de parties de $\hat{G}'$.

En effet, soit ω' un ouvert de $\hat{G}'$ tel que, pour tout i de I et tout λ_1 et λ_2 de Λ_i, on ait $(\lambda_1 + \omega') \cap (\lambda_2 + \omega') = \emptyset$. Soit h une fonction de $L^2(G')$ dont le module dépasse 1 sur la réunion du support de f et du support de g et telle que $\check{h}$ ait son support dans ω'. Il existe alors deux fonctions f' et g' dans $L^2(G')$, à support respectivement dans le support de f et dans celui de g, et telles que

$f = f' * h$ et $g = g' * h$.

D'où pour f

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_i} |\hat{f}(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda_i} \left| \int_{\hat{G}'} f'(\xi)\, \hat{h}(\lambda - \xi)\, d\xi \right|^2$$

$$\leqslant \|h\|_2 \, \|f\|_2 ,$$

et de même pour g

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_i} |\hat{g}(\lambda)|^2 \leqslant \|h\|_2 \, \|f\|_2 .$$

Soit finalement

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_1} |\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)| \leqslant \|h\|_2^2 \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

4. Presque périodicité de la mesure μ définie sur G par $\varphi \in \mathcal{S}(G')$

Proposition 5. La mesure μ définie sur G par $\varphi \in \mathcal{S}(G')$ (Déf. 1) est presque périodique c'est-à-dire que pour toute fonction ψ continue à support compact dans G, $\mu * \psi$ est une fonction presque périodique.

Du fait que $\sup_g |\mu(H+g)| < \infty$ pour tout compact H de G, on peut, par densité uniforme de $\mathcal{S}(G)$ dans l'espace des fonctions continues à support compact, se ramener au cas $\psi \in \mathcal{S}(G)$.

Lemme 3. Pour tout voisinage compact $\mathcal{V}$ de l'origine dans G', on peut trouver une fonction χ de $\mathcal{S}(G')$, à support dans $\mathcal{V}$, prenant ses valeurs dans $[0,1]$, et une partie bien séparée R de G', telles que la famille des translatées $\chi_r(x) = \chi(x-r)$, $r \in R$, de χ forme une partition de l'unité dans G'.

Une telle famille χ_r est en effet très facile à construire dans $\mathbf{R}$, donc dans $\mathbf{R}^n$, et dans $\mathbf{T}$, donc dans $\mathbf{T}^n$; ensuite en utilisant le théorème de structure des groupes a. l. c. on peut le faire pour un groupe G' quelconque.

Démonstration de la proposition 5.

Soit $\mathcal{W}$ le support de ψ et soit $\mathcal{V}$ un voisinage de l'origine dans G' tel que $\mathcal{V} + \mathcal{V}$ sépare bien (Chap. I, § 1, déf. 4) le "modèle" $\Lambda^{\mathcal{W}+\mathcal{W}}$ défini sur G' par

le compact $\mathcal{W} + \mathcal{W}$ de G. (Cf. la démonstration du lemme 1 ci-dessus). Cela entraine que, pour tout x de G' le compact $\mathcal{W} \times (x + \mathcal{V})$ de $G \oplus G'$ est disjoint de tous ses translatés par des éléments de D et est donc isomorphe à son image dans $G \oplus G'/D$.

Soit aussi $(\chi_r)_{r \in R}$ une partition de l'unité dans G' définie comme dans le lemme 3. Puisque la fonction φ appartient à $\mathcal{S}(G')$, la famille $(\varphi \chi_r)_{r \in R}$ de fonctions de $\mathcal{S}(G')$ est normalement sommable. Chaque fonction $\varphi \cdot \chi_r$ définit sur G une mesure μ_r par $\mu_r(\{\pi(d)\}) = \varphi \cdot \check{\chi}_r(\pi'(d))$ et la famille de mesures $(\mu_r)_{r \in R}$ est sommable en norme sur tout compact et a pour somme μ. Plus précisément, on obtient que, pour tout compact H de G,

$$\sup_{x \in G} \left\{ \left| \mu - \sum_{r \in J} \mu_r \right| (H+x) \right\} \longrightarrow 0$$

suivant le filtre des complémentaires des parties finies J de R.

D'autre part, le support de $\psi \otimes (\varphi \cdot \chi_r)$ étant isomorphe à son image dans $G \oplus G'/D$, la fonction $\psi \otimes (\varphi \cdot \chi_r)$ définit une fonction presque périodique sur G. On vérifie que cette fonction n'est autre que $\check{\mu}_r *_G \psi$, et en faisant le somme, puisque ψ est à support compact on obtient que $\mu *_G \psi$ est limite uniforme sur G de fonctions presque périodiques.

En appliquant cette proposition on voit, en particulier, que la mesure $\mu = \rho + \alpha$ associée au paragraphe précédent au modèle Λ^K est presque périodique ainsi que sa transformée de Fourier.

5. Densité des modèles

Afin de définir les notions de densité uniforme, on choisit dans G, groupe a. l. c. muni de la mesure de Haar m, une famille $\{H_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ d'ouverts relativement compacts vérifiant :

1) Pour toute fonction f continue presque périodiques sur G dont le prolongement continu au compactifié de Bohr de G a pour intégrale $\mathcal{M}(f)$, (pour la mesure de Haar de masse 1)

$$\mathcal{M}(f) = \lim_{\mathcal{J}} \frac{1}{m(H_i)} \int_{H_i+y} f(x)\, dm(x)$$

uniformément par rapport à y dans G.

2) Il existe un voisinage compact $\mathcal{V}$ de l'origine dans G tel que

$$\lim_{\mathcal{J}} \frac{m(H_i + \mathcal{V})}{m(H_i)} = 1,$$

et, en notant $H_i \ominus \mathcal{V} = \int_G \{(\int_G H_i) + \mathcal{V}\}$,

$$\lim_{\mathcal{J}} \frac{m(H_i \ominus \mathcal{V})}{m(H_i)} = 1.$$

A partir de $\mathbf{R}^n$, où l'existence d'une telle famille H_i est évidente on passe facilement à un groupe G a. l. c. quelconque à l'aide, par exemple, du théorème de structure (cf. aussi [5]).

La famille $\{H_i\}$ étant fixée, on pose, pour toute partie Λ bien séparée de G :

$$\overline{\text{dens}}\ \Lambda = \lim_{\mathcal{J}} \sup_{y\in G} \frac{\text{card}\{(H_i+y)\cap\Lambda\}}{m(H_i)}$$

$$\underline{\text{dens}}\ \Lambda = \lim_{\mathcal{J}} \inf_{y\in G} \frac{\text{card}\{(H_i+y)\cap\Lambda\}}{m(H_i)}.$$

Soit alors G' un groupe D-associé à G, muni de la mesure de Haar m' ; on appelle, comme au § 3, $\frac{1}{c}$ la mesure dans $G \oplus G'$ d'un domaine fondamental de D.

Proposition 6.

a) Si K est un compact de G' et Λ^K le modèle défini sur G par K :

$$\overline{\text{dens}}\ \Lambda^K \leqslant c\, m'(K).$$

b) Si $\mathcal{O}$ est un ouvert relativement compact de G' et $\Lambda^{\mathcal{O}}$ le modèle défini sur G par $\mathcal{O}$

$$\underline{\text{dens}}\ \Lambda^{\mathcal{O}} \geqslant c\, m'(\mathcal{O}).$$

Soit, en effet, h une fonction de $\mathcal{S}(G)$ positive, d'intégrale 1, à support dans le voisinage $\mathcal{V}$ de 0 défini dans la condition 2 ci-dessus. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(G')$, positive, valant 1 sur K, d'intégrale inférieure à $m'(K) + \varepsilon$; soit μ la mesure définie par φ sur G (§ 3). On a

$$\text{card}\left\{(H_i + y) \cap \Lambda^K\right\} \leqslant \int_{H_i + \mathcal{V} + y} (h * \mu)\, dm.$$

Donc, d'après les propriétés 1) et 2) de $\left\{H_i\right\}$

$$\overline{\text{dens}}\ \Lambda^K \leqslant \limsup_y \frac{1}{m(H_1)} \int_{H_i + \mathcal{V} + y} (h * \mu)\, dm$$

$$\leqslant \mathfrak{M}(h * \mu) = c \int_{G \oplus G'} (h \otimes \varphi)\, d(m \otimes m')$$

$$= c \int_{G'} \varphi\, dm'.$$

Soit $\overline{\text{dens}}\ \Lambda^K \leqslant c(m'(K) + \varepsilon)$.

b) Soit de même $\varphi' \in \mathcal{S}(G')$, à valeurs dans $[0,1]$, à support dans $\mathcal{O}$ et d'intégrale

supérieure à $m'(\Theta) - \varepsilon$; soit μ' la mesure définie sur G par φ'.

On a

$$\operatorname{card}\left\{(H_i + y) \cap \Lambda^{\Theta}\right\} \geqslant \int_{H_i \ominus \mathcal{V} + y} h * \mu \, dm,$$

et par le même procédé

$$\underline{\text{dens}}\ \Lambda^{\Theta} \geqslant c(m'(\Theta) - \varepsilon).$$

En particulier, on voit donc qu'un modèle Λ^K de G défini par une partie compacte K, intégrable au sens de Riemann de G', a (par rapport à la famille $\{H_i\}$) une densité uniforme proportionnelle à la mesure de K.

Dans le même cas, on voit que la mesure α de § 3 qui apparaissait comme un reste dans une formule de type Poisson, (ρ mesure donnant la masse 1 à chaque point de Λ^K et $\rho + \alpha$ mesure presque périodique à transformée de Fourier mesure) peut être rendue arbitrairement petite dans le sens :

Corollaire 1. Si le compact K a une frontière de mesure nulle, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir le reste α tel que

$$\overline{\lim} \frac{\alpha(H_i)}{m(H_i)} < \varepsilon.$$

6. Principe des soucoupes pour un modèle.

Définition 2. Soit Λ^K un modèle du groupe G. Nous dirons que le voisinage compact $\mathcal{V}$ de l'origine dans G sépare strictement Λ^K s'il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de l'origine dans G' (D-associé à G) tel que $\mathcal{V}$ sépare bien le modèle $\Lambda^{\bar{K}+\mathcal{W}}$ (chap. I, déf. 4).

On peut alors énoncer le "principe des soucoupes" (cf [14]) suivant :

Théorème 1. Si le compact L de G possède un voisinage $\mathcal{V}$ séparant strictement Λ^K, il existe une constante C telle que si S est une pseudo-mesure à support compact dans $\Lambda^K + L$, la mesure T portée par Λ^K et définie par

$$T(\{\lambda\}) = \int_{\lambda+L} dS(t)$$

vérifie $\|\hat{T}\|_\infty \leqslant C\|\hat{S}\|_\infty$.

Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de l'origine dans G' tel que $\mathcal{V}$ sépare strictement $\Lambda^{\overline{K}+\mathcal{W}}$. Comme au § 3 on peut construire une mesure μ portée par $\Lambda^{\overline{K}+\mathcal{W}}$ et donnant la masse 1 à chaque point de Λ^K. Soit aussi h une fonction réelle de $\mathcal{D}(G)$ à support dans $\mathcal{V}$ et valant 1 sur un voisinage de L.

On peut écrire alors

$$S = (h * \mu)S,$$

puisque $h * \mu$ vaut 1 sur un voisinage de support de S. Mais par définition de T, on peut aussi écrire

$$T = (\check{h} * S)\cdot\mu, \quad \text{avec } \check{h}(x) = h(-x).$$

On a donc

$$\hat{T}(\xi) = \int_{\hat{G}} (\hat{\bar{h}}\,\hat{S})(\xi - y)\, d\hat{\mu}(y).$$

Considérons sur $\hat{G}$ une partition de l'unité $(\chi_r(\xi))_{r\in R}$, définie comme au lemme 3, avec une fonction χ à support dans un compact H, R étant une partie bien séparée de $\hat{G}$. On peut écrire

$$\hat{T}(\xi) = \int \sum_{r\in R} \chi_r(y)\, (\hat{\bar{h}}\,\hat{S})(\xi - y) d\hat{\mu}(y)$$

$$= \sum_{r\in R} \int \chi_r(y)\ \overline{\hat{h}}\ \hat{S}(\xi - y)d\hat{\mu}(y)\ ;$$

d'où

$$|\hat{T}(\xi)| \leqslant \|\hat{S}\|_\infty \left(\sup_{r\in R} |\hat{\mu}|(H + r)\right) \sum_{r\in R} \sup_{y\in \xi - r - H} |\hat{h}(y)|\,.$$

On a donc bien

$$\|\hat{T}\|_\infty \leqslant C\|\hat{S}\|_\infty, \quad \text{avec une constante } C \text{ finie.}$$

Corollaire 2. *Λ^K, L et C étant définis comme au théorème 1, à toute fonction f de l'algèbre A(G), on peut associer une fonction $\tilde{f}$ de A(G) telle que*

1) *Si $\lambda\in\Lambda^K$ et $x\in L$, $\tilde{f}(x+\lambda) = f(\lambda)$*

2) $\|\tilde{f}\|_{A(G)} \leqslant C\|f\|_{A(G)}$.

Démonstration. Avec les notations du théorème 1, posons $\tilde{f} = h * (f.\mu)$. La condition 1) résulte de ce que $f.\mu(\{\lambda\}) = f(\lambda)$, et la condition 2) de ce que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\hat{G}} \hat{h}(\xi)\hat{f}(\xi - y)d\hat{\mu}(y),$$

donc

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_{L^1(G)} &\leqslant \iint_{\hat{G}\times\hat{G}} |\hat{h}(\xi)|\,|\hat{f}(\xi-y)|\ d|\hat{\mu}|(y)\ d\xi \\ &\leqslant \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\xi)| \left\{\int_{\hat{G}} |\hat{h}(\xi-y)|\ d|\hat{\mu}|(y)\right\} d\xi \\ &\leqslant C \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\xi)|d\xi, \quad \text{avec la constante } C \text{ définie au}\end{aligned}$$

théorème 1.

Le principe des soucoupes et ses divers corollaires ont été établis par Y. Meyer dans le cadre plus général des parties Λ d'un groupe a. l. c. qui possèdent un compact associé ([14]), donc en particulier pour les ensembles harmonieux. La formule de Poisson qu'il a introduite dans le cas réel se généralise, comme on le voit aux groupes a. l. c..

Par exemple, nous l'employerons pour les problèmes de synthèse spectrale dans $\mathbb{Q}_p$.

En particulier nous utiliserons la généralisation suivante du théorème 1 (cf. [14]).

Théorème 2. Soit K un compact quelconque du groupe G' D-associé à G et soit Λ une partie du modèle Λ^K. Soit L un compact quelconque de G et $PM_o(\Lambda + L)$ l'espace des pseudo-mesures à support compact dans $\Lambda + L$. Il existe un ensemble fini F dans L et un endomorphisme continu T de $PM_o(\Lambda + L)$ tel que :

si $S \in PM_o(\lambda + L)$, $T(S)$ est une mesure portée par $\lambda + F$.

La démonstration consiste à décomposer à la fois le modèle Λ^K et le compact L de manière à se placer dans les conditions d'application du théorème 1.

a) La première opération consiste, grosso modo, à recouvrir le modèle Λ^K par des modèles Λ_j tels que L sépare strictement chaque Λ_j :

Lemme 4. On peut recouvrir le compact K par un nombre fini d'ouverts Ω_j de G', tous translatés d'un même voisinage symétrique de l'origine Ω dans G' et trouver un voisinage symétrique ω de l'origine dans G tel que

1) $(L+\omega+\omega)$ sépare chaque modèle $\Lambda^{\bar{\Omega}_j+\Omega}$

2) A chaque fois que pour j, j' et pour $d \in D$ on a

$$\{(\bar{\Omega}_j + \Omega) + (L+\omega)\} \cap \{(\bar{\Omega}_{j'} + \Omega) + (L + \omega) + d\} \neq \emptyset,$$

alors on a aussi

$$\{(\bar{\Omega}_j + \Omega) + L\} \cap \{(\bar{\Omega}_{j'} + \Omega) + L + d\} \neq \emptyset.$$

Pour montrer le lemme, soit ω' un voisinage compact symétrique de l'origine dans

G et Ω un voisinage ouvert relativement compact symétrique de l'origine dans G' suffisamment petits pour que $(L + \omega' + \omega')$ sépare chaque modèle de la forme $\Lambda^{\overline{\Omega}+\overline{\Omega}+g'}$, où g' est un point quelconque de G' (cf. I, n° 1, prop. 2). On peut recouvrir K par un nombre fini de translatés Ω_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, de Ω ce qui réalise la condition 1).

Les Ω_j étant fixés une fois pour toute, on constate que pour chaque j l'ensemble $(\overline{\Omega}_j + \overline{\Omega}) + (L + \omega')$ de $G \oplus G'$ ne peut rencontrer qu'un nombre fini d'ensembles de la forme $(\overline{\Omega}_{j'} + \overline{\Omega}) + (L + \omega') + d$, où $1 \leqslant j' \leqslant p$ et $d \in D$. On peut donc, grâce à la compacité de $\overline{\Omega}_j + \overline{\Omega} + L$, remplacer ω' par un voisinage compact symétrique ω de l'origine dans G, de façon à réaliser pour chaque valeur de j la condition 2).

Les constructions du lemme sont faites une fois pour toutes.

Soient $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_p$, p fonctions de la classe $\mathcal{D}(G \oplus G')$ telles que le support de $\tilde{\varphi}_j$ soit contenu dans $\Omega_j + (L + \omega)$ et telles que

$$\sum_{j=1}^{p} \tilde{\varphi}_j(x) = 1, \quad \text{pour tout } x \text{ de } K+L.$$

Soit φ_j la restriction à G de la fonction $\sum_{d \in D} \tilde{\varphi}_j(x - d)$, pour $1 \leqslant j \leqslant p$. Les fonctions φ_j sont des transformées de Fourier de mesures bornées de $\hat{G}$ et opèrent multiplicativement sur $PM_o(\Lambda + L)$:

Lemme 5. *Il existe des constantes c_j telles que pour toute pseudo-mesure appartenant à $PM_o(\Lambda + L)$, $\|\varphi_j S\|_{PM_o(G)} \leqslant c_j \|S\|_{PM_o(G)}$, et l'on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j S = S$.*

Considérons maintenant pour chaque j une mesure positive μ_j portée par le modèle $\Lambda^{\overline{\Omega}_j + \Omega}$ et donnant la masse 1 aux points de $\Lambda^{\overline{\Omega}_j}$, satisfaisant la formule de Poisson

avec reste : $\left(\sup_{x\in\hat{G}} \int_{x+H} d|\hat{\mu}_j| = M_j(H) < \infty \right.$ pour tout compact H de $\hat{G}$; cf. n° 3).

b) La difficulté restante provient de ce que l'on n'est pas assuré que la pseudo-mesure $\varphi_j S$ est portée par $\Lambda^{\bar{\Omega}_j} + L$, auquel cas on n'aurait plus qu'à appliquer pour chaque j le théorème 1. D'où la nécessité de découper aussi le compact L et d'introduire la partie finie F de l'énoncé.

Soient $d_1, \ldots, d_n$, les points de D pour lesquels il existe un couple j,j', $1 \leqslant j \leqslant p$, $1 \leqslant j' \leqslant p$, tel que

$$\left\{(\bar{\Omega}_j + \Omega)+L\right\} \cap \left\{(\bar{\Omega}_j + \Omega)+L+d\right\} \neq \emptyset.$$

Soit L_i la projection sur G, $\pi(L + d_i)$ de $L + d_i$. Pour tout x de G n'appartenant pas aux ensembles $L_{i_1}, \ldots, L_{i_\ell}$, on peut trouver un voisinage $\vartheta(x)$ tel que $\vartheta(x) - x$ soit contenu dans ω et qui ne rencontre pas $L_{i_1}, \ldots, L_{i_\ell}$. En extrayant, du recouvrement de L par les $\vartheta(x)$, $x\in L$, un sous recouvrement fini, on déduit qu'on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_r$, de L tels que si

$$\vartheta(x_k) \cap L_i \neq \emptyset \quad (1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant i \leqslant r) \text{ alors } x_k \in L_i.$$

Soit alors ζ_k, $k = 1, \ldots, m$, des fonctions de $\mathcal{D}(G)$, à support dans $\vartheta(x_k)$, et vérifiant $\sum \zeta_k(x) = 1$, si $x\in L$.

Soit $\mu_{j,k}$ la mesure translatée de μ_j par x_k : $\mu_{j,k}(H) = \mu_j(H - x_k)$.

c) Conclusion.

Remarquons d'abord qu'il résulte de ce que $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{j=1}^{p} \Lambda^{\bar{\Omega}_j+\Omega}$ est contenu dans un modèle,

que les éléments de G de la forme $\lambda - \lambda'$ avec $\lambda \in \tilde{\Lambda}$, $\lambda' \in \tilde{\Lambda}$, $\lambda - \lambda' \in L-L$, forment un ensemble fini F' puisque $L-L$ est compact. Nous prendrons pour F

$$F = \bigcup_{k=1}^{m} (F' + x_k).$$

Considérons alors l'opérateur $\mathcal{C}_{j,k}$ défini sur $PM_o(\Lambda + L)$ par

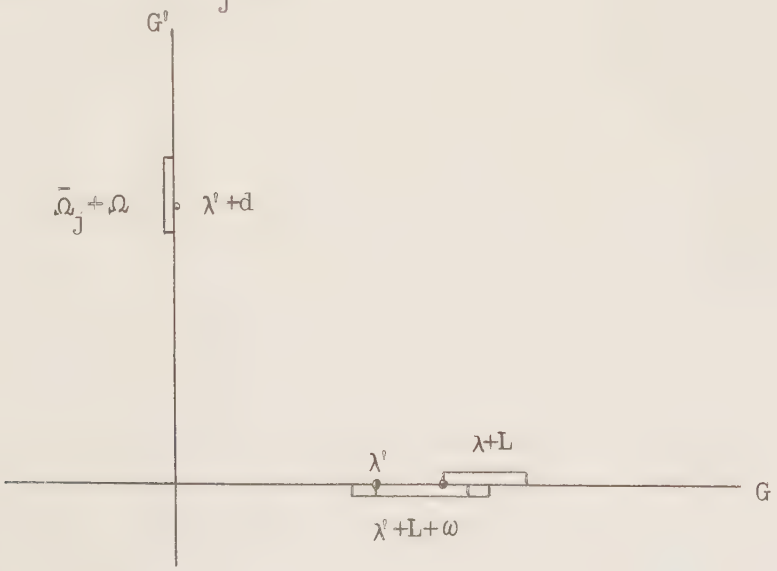
$$\mathcal{C}_{j,k}(S) = \left[\zeta_k(-t+x_k) * \varphi_j S(t)\right] \circ \mu_{j,k}.$$

Il résulte de la formule de Poisson avec reste qu'on a

$$\|\mathcal{C}_{j,k}(S)\|_{PM(G)} \leqslant c_{j,k} \|S\|_{PM(G)}.$$

D'autre part, supposons que S est portée par $\lambda + L$, $(\lambda \in \Lambda)$; il faut montrer qu'alors $\mathcal{C}_{j,k}(S)$ est une mesure portée par $\lambda + F$. A priori elle est portée par des points de la forme $\lambda' + x_k$, où $\lambda' \in \Lambda^{\bar{\Omega}_j + \Omega}$, la masse de $\mathcal{C}_{j,k}(S)$ en un de ces points étant le produit de $\mu_j(\{\lambda'\})$ par $(\zeta_k(-t+x_k) * \varphi_j S(t))(\lambda' + x_k) = \int \zeta_k(t-\lambda') d\varphi_j S(t)$.

Nous allons voir que si la masse de $\mathcal{C}_{j,k}(S)$ en $\lambda' + x_k$ n'est pas nulle, c'est que l'on peut écrire $\lambda' + x_k = \lambda + f$, où $f \in F$. En effet $\zeta_k(t-\lambda')$ a son support dans $\lambda' + x_k + \omega$, et donc l'intégrale est nulle sauf si $\lambda + L + d$ rencontre $(\lambda' + d) + x_k + \omega$, où d est choisi tel que $\lambda' + d \in \bar{\Omega}_j + \Omega$.



que les éléments de G de la forme $\lambda - \lambda'$ avec $\lambda \in \tilde{\Lambda}$, $\lambda' \in \tilde{\Lambda}$, $\lambda - \lambda' \in L-L$, forment un ensemble fini F' puisque $L-L$ est compact. Nous prendrons pour F

$$F = \bigcup_{k=1}^{m} (F' + x_k).$$

Considérons alors l'opérateur $\mathcal{C}_{j,k}$ défini sur $PM_o(\Lambda + L)$ par

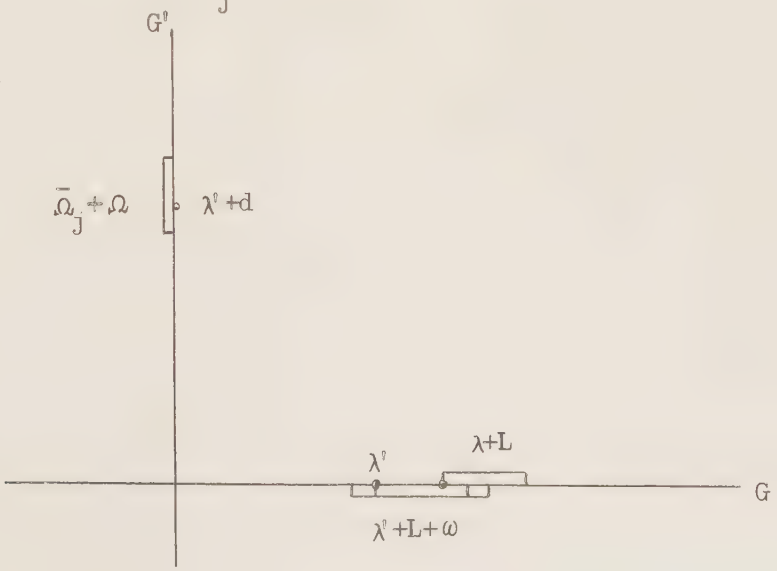
$$\mathcal{C}_{j,k}(S) = \left[\zeta_k(-t+x_k) * \varphi_j S(t)\right] \cdot \mu_{j,k}.$$

Il résulte de la formule de Poisson avec reste qu'on a

$$\|\mathcal{C}_{j,k}(S)\|_{PM(G)} \leqslant c_{j,k} \|S\|_{PM(G)}.$$

D'autre part, supposons que S est portée par $\lambda + L$, $(\lambda \in \Lambda)$; il faut montrer qu'alors $\mathcal{C}_{j,k}(S)$ est une mesure portée par $\lambda + F$. A priori elle est portée par des points de la forme $\lambda' + x_k$, où $\lambda' \in \Lambda^{\bar{\Omega}_j + \Omega}$, la masse de $\mathcal{C}_{j,k}(S)$ en un de ces points étant le produit de $\mu_j(\{\lambda'\})$ par $(\zeta_k(-t+x_k) * \varphi_j S(t))(\lambda' + x_k) = \int \zeta_k(t-\lambda') d\varphi_j S(t)$.

Nous allons voir que si la masse de $\mathcal{C}_{j,k}(S)$ en $\lambda' + x_k$ n'est pas nulle, c'est que l'on peut écrire $\lambda' + x_k = \lambda + f$, où $f \in F$. En effet $\zeta_k(t-\lambda')$ a son support dans $\lambda' + x_k + \omega$, et donc l'intégrale est nulle sauf si $\lambda + L + d$ rencontre $(\lambda' + d) + x_k + \omega$, où d est choisi tel que $\lambda' + d \in \bar{\Omega}_j + \Omega$.



Si on suppose que λ appartient au modèle Λ^{Ω_i} (il appartient à l'un des Λ^{Ω_i} puisque $\Lambda \subset \bigcup_i \Lambda^{\Omega_i}$) on voit que $x_k + \omega$ coupe la projection sur G d'un certain translaté $(\bar{\Omega}_i + \Omega_i) + L + d'$ de $(\bar{\Omega}_i + \Omega_i) + L$ qui coupe $(\bar{\Omega}_j + \Omega_j) + L + \omega$ et donc qui coupe (condition b) du lemme 4) $(\bar{\Omega}_j + \Omega_j) + L$. Comme $x_k + \omega \supset \vartheta(x_k)$ cela implique, d'après le choix des x_k que

$$\lambda' + d + x_k \subset \lambda + d + L,$$

et donc que

$$\lambda' + x_k \subset \lambda + L.$$

Il en résulte que

$$\lambda - \lambda' \in x_k - L \subset L - L$$

et donc que $$\lambda' + x_k = \lambda + (\lambda' - \lambda) + x_k \in \Lambda + F.$$

Pour achever la démonstration du théorème 2, il suffit de définir l'endomorphisme T de $PM_\beta(\Lambda + L)$ par

$$T(S) = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \mathcal{C}_{j,k}(S).$$

On a alors

$$\|T(S)\|_{PM(G)} \leqslant \left(\sum c_{j,k}\right) \|S\|_{PM(G)}.$$

et si le support de S est contenu dans $\lambda + L$ $(\lambda \in \Lambda)$, celui de $T(S)$ est contenu dans $\lambda + F$ comme celui de chaque $\mathcal{C}_{j,k}(S)$.

Chapitre VI

Ensembles d'unicité et de synthèse spectrale dans les corps p-adiques

Nous allons nous intéresser ici aux ensembles parfaits symétriques de la forme $\sum_{k\geqslant 1} \varepsilon_k \xi_k$ $(\varepsilon_k = 0$ ou $1)$ définis dans un corps p-adique, et leur appliquer les méthodes développées dans les chapitres précédents.

A. Ensembles d'unicité

Dans le cas réel, Salem et Zygmund ont montré ([10]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $E_\theta = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon_j \theta^{-j}$ $(\theta \in \mathbf{R},\ |\theta| > 2)$ soit un ensemble d'unicité est que θ soit un nombre de Pisot. Françoise Bertrandias a étendu ce théorème aux parfaits symétriques à rapport de dissection constant dans les adèles de $\mathbf{Q}$ (et donc en particulier dans $\mathbf{Q}_p$)([1]), tandis qu'Yves Meyer utilisait ses résultats sur les modèles réels pour simplifier la démonstration de Salem-Zygmund et l'étendre à des cas d'ensembles à rapport de dissection non constant ([14]).

Nous allons, pour notre part, appliquer à ce problème les propriétés des modèles dans les extensions finies de $\mathbf{Q}_p$.

Rappelons qu'un compact E d'un groupe a. l. c. G est dit ensemble d'unicité s'il n'existe pas de pseudo-mesure non nulle portée par E et dont la transformée de Fourier tende vers 0 à l'infini.

On a alors le résultat classique suivant ([10], V, th. III).

Lemme 1. Si E est un compact de G, pour que E soit d'unicité, il suffit qu'il existe une suite μ_k de mesures sur le dual $\hat{G}$ de G, vérifiant

a) $\sup_k \|\mu_k\| < \infty$ ($\|\mu_k'\|$ est la masse totale de μ_k)

b) $\hat{\mu}_k$ est nulle, pour chaque k, sur un voisinage de E

c) $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \delta(0)$, dans la topologie faible $\sigma(M(G), \mathcal{C}_0(G))$.

($M(G)$: espace des mesures bornées sur G, $\mathcal{C}_0(G)$: espace des fonctions continues sur G tendant vers 0 à l'infini, $\delta(0)$: masse de Dirac à l'origine de G).

Soit alors K une extension finie, de degré m, de $\mathbb{Q}_p$ et k un corps de nombres algébriques, de degré n sur $\mathbb{Q}$, contenu dans K. On notera F l'ensemble des places infinies f sur k (et $|\cdot|_f$ les valeurs absolues correspondantes) et ν la place définie par K sur k.

Théorème 1. Soit $0 < \alpha < 1$, et soit $(\omega_j)_{j\geq 1}$ une suite d'éléments de $k \cap S_p^0(K)$ (nombres de Pisot-Chabauty de k) vérifiant

1) $\forall j \geq 1$, $|\omega_j|_\nu > 2$

2) Pour toute f de F, $|\omega_j|_f < \alpha$.

Alors l'ensemble symétrique E construit dans K à l'aide des rapports de dissection

$\xi_j = \omega_j^{-1}$;

$$E = \left\{ x \; ; \; x = \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j (1-\xi_j) \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{j-1}, \text{ où } \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1 \right\}$$

est un ensemble d'unicité.

Démonstration. En se restreignant au besoin à un sous-corps fermé de K, on peut supposer k dense dans K et donc $K = k_\nu$.

Soit P l'ensemble des places p-adiques de k et $\mathcal{A}_p$ l'anneau des éléments λ de k vérifiant, pour toute place i sur k n'appartenant pas à $F \cup P$, $|\lambda|_i \leqslant 1$.

Soit aussi $\mathcal{H}$ le groupe

$$\mathcal{H} = \prod_{f \in F} k_f \times \prod_{\substack{\rho \in P \\ \rho \neq \nu}} k_\rho .$$

On a vu au chapitre III, 1, 3°) que $\mathcal{H}$ et k_ν étaient $\mathcal{A}_p$ associés.

Soit $\sum$ le groupe compact $\mathcal{H} \times k_\nu / \mathcal{A}_p$ et π la projection canonique de $\mathcal{H} \times k_\nu$ sur $\sum$. Restreinte à k_ν, π définit un "enroulement" (homomorphisme injectif d'image dense) de k_ν sur $\sum$ que nous allons composer avec les dilatations h_j de k_ν définies par

$$\forall t \in k_\nu, \quad h_j(t) = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_j t ,$$

de façon à obtenir une suite d'enroulements de plus en plus rapides de k_ν dans $\sum$.

Encore quelques notations. Soit V le compact de $\mathcal{H}$ formé des éléments $\left((u_f)_{f \in F} , (u_\rho)_{\substack{\rho \in P \\ \rho \neq \nu}} \right)$ vérifiant

$$\forall f \in F, \quad |u_f|_f \leqslant \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad \text{et} \quad \forall \rho \in P, \ \rho \neq \nu, \ |u_\rho|_\rho \leqslant 1 .$$

Soit U la boule unité (sous-anneau compact maximal) de k_ν, et pour tout entier j,

$p^{\frac{j}{m}}U = \{x \in k_\nu \; ; \; |x|_\nu \leqslant p^{\frac{j}{m}}\}$, m désignant, rappelons le, le degré de k_ν sur $\mathbb{Q}_p$.

Alors, d'après le théorème de Fubini, il existe une constante C telle que pour tout entier j, le compact $\pi(p^{\frac{j}{m}}U \times V)$ de $\sum$ ait une mesure inférieure à $C\, p^{-j}$ pour la mesure de Haar de masse 1 sur $\sum$.

Soit γ le plus petit entier tel que $p^{\frac{\gamma}{m}} > 2$ et soit N un entier tel que $(\frac{p^{\frac{\gamma}{m}}}{2})^N > C$.

Lemme 2. Il existe un compact K de $\sum$ de mesure inférieure à $Cp^{-N\gamma}$ tel que pour tout entier $j \geqslant 1$, $\pi \circ h_j(E)$ soit contenu dans la réunion de 2^N translatés de K.

En effet, on a $h_j(E) = F_j + E_j$ où

$$F_j = \{x = \varepsilon_1(\omega_1 - 1)\omega_2 \ldots \omega_j + \varepsilon_2(\omega_2 - 1)\omega_3 \ldots \omega_j + \ldots + \varepsilon_j(\omega_j - 1)\},$$

et $E_j = \{x = \varepsilon_{j+1}(1 - \xi_{j+1}) + \varepsilon_{j+2}(1-\xi_{j+2})\xi_{j+1} + \ldots\}$.

Or, d'une part les points de F_j sont, dans $\mathcal{K} \times k_\nu$, congrus modulo $\mathcal{A}_p$ à des points de V puisqu'ils appartiennent au $\mathbf{Z}(p^{-1})$-module engendré par les entiers algébriques de k (isomorphe à $\mathcal{A}_p$) et que leurs conjugués satisfont à l'hypothèse 2) du théorème. D'autre part, l'hypothèse 1) entraine que pour tout j, $|\omega_j|_\nu \geqslant p^{\frac{\gamma}{m}}$ et donc que E_j est contenu dans la réunion de 2^N translatés de $p^{\frac{N\gamma}{m}}U$.

On peut donc prendre $K = \pi(p^{\frac{N\gamma}{m}}U \times V)$, et le lemme 2 est démontré.

Lemme 3. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine dans $\sum$ et une suite $(x_j)_{j\geqslant 1}$ de points de $\sum$ tels que, pour tout $j \geqslant 1$ on ait

on ait

$$\pi \circ h_j(E) \cap (\mathcal{V} + x_j) = \emptyset .$$

Soit, en effet, $\mathcal{V}$ un voisinage symétrique de l'origine dans $\sum$ tel que $K + \mathcal{V}$ ait une mesure strictement inférieure à 2^{-N}. Il résulte alors du lemme 2 qu'on peut trouver pour chaque j un point x_j de $\sum$ tel que $\pi \circ h_j(E) \cap (\mathcal{V} + x_j) = \emptyset$.

Terminons alors la démonstration du théorème 1. Soit φ une fonction de la classe A sur $\sum$, d'intégrale 1, et à support compact dans $\mathcal{V}$ et soit φ_j la translatée $\varphi_j(x) = \varphi(x - x_j)$. Les fonctions $\psi_j = \varphi_j \circ \pi \circ h_j$ sont des fonctions continues presque-périodiques sur h_ν, nulles sur un voisinage de E (lemme 3) transformées de Fourier de mesures discrètes μ_j vérifiant

a) $\|\mu_j\| = \|\varphi\|_{A(\sum)}$

b) $\mu_j \longrightarrow \delta$ dans la topologie $\sigma(M(k_\nu), \mathcal{C}_o(k_\nu))$; ceci comme conséquence immédiate de ce que les mesures μ_j vérifient des relations de la forme

$\mu_j(\{x\}) = \alpha_j(x)\mu_1(\{\xi_1 \circ \ldots \circ \xi_j x\})$, avec $|\alpha_j(x)| = 1$.

B. Ensembles de synthèse spectrale

Rappelons d'abord qu'un compact E d'un groupe a. l. c. est dit ensemble de synthèse spectrale, si toute pseudomesure portée par E est limite de mesures portées par E, pour la topologie faible des pseudo-mesures ([20], p. 184).

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et Θ un élément de $S_p^o(K)$ (nombre de

Pisot-Chabauty). Nous allons montrer que l'ensemble E_θ des sommes $\sum_{k\geq 1}^{\infty} \varepsilon_k \theta^{-k}$ (avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1) vérifie une forme forte de la propriété de synthèse spectrale, étendant ainsi au cas p-adique le résultat obtenu dans le cas réel par Y. Meyer.

Théorème 2. Il existe une suite d'endomorphismes uniformément bornés, $(T_j)_{j\geq 1}$, de $PM(E_\theta)$ telle que

1) Si $S \in PM(E_\theta)$, $T_j(S)$ est une mesure à support fini dans E_θ.

2) $\widehat{T_j(S)} \xrightarrow[j\to\infty]{} \hat{S}$, uniformément sur tout compact de $\hat{K}$.

Démonstration. Nous avons vu que si $\theta \in S_p^o(K)$ l'ensemble Λ_θ formé par les sommes finies $\sum_{j\geq 0} \varepsilon_j \theta^j$ ($\varepsilon_j = 0$ ou 1) est un modèle de K (chap. IV, corol. 3).

Nous allons appliquer les résultats du chap. V, § 6, (théorème 2), au modèle Λ_θ et au compact E_θ : on obtient un endomorphisme continu de $PM_o(\Lambda_\theta + E_\theta)$ tel que si la pseudo-mesure S est portée par $\lambda + E_\theta$ ($\lambda \in \Lambda_\theta$) la mesure à support fini $T(S)$ est aussi portée par $\lambda + E_\theta$ et on a

$$(S\ ,\ \varphi) = (T(S)\ ,\ \varphi)$$

pour toute fonction de $A(K)$ constante sur un voisinage de $\lambda + E_\theta$.

Soit p^r ($r = [K : \mathbb{Q}_p] \in \mathbb{Z}$) le rayon d'une boule fermée de K centrée à l'origine et contenant E_θ. Les caractères sur K, appartenant à la boule de rayon p^{-r} centrée à l'origine du dual $\hat{K}$ de K (qui s'identifie, on le sait, à K lui même) sont constants sur toute boule de rayon p^r dans K et donc sur chaque ensemble $\lambda + E_\theta$, lorsque $\lambda \in \Lambda_\theta$. Donc

$$\widehat{T(S)}(\chi) = \hat{S}(\chi), \quad \text{pour tout } \chi \in \hat{K} \text{ tel que } |\chi|_p \leqslant p^{-r}.$$

Dans K, les homothéties de rapport θ^j envoient le compact E_θ dans $\Lambda_\theta + E_\theta$ et donc l'image $\tau_j(S)$, par cette homothétie, d'une pseudo-mesure S de $PM(E)$, $(\tau_j(S)(x) = S(\theta^{-j}x))$, appartient à $PM_o(\Lambda_\theta + E_\theta)$. On définit donc une suite $(T_j)_{j \geqslant 1}$ d'endomorphismes de $PM(E)$ en posant

$$T_j = \tau_j^{-1} \circ T \circ \tau_j ,$$

et on obtient immédiatement que les T_j sont uniformément bornés en norme par la norme de T et que

$$T_j(S)(\chi) = \check{S}(\chi)$$

pour tout χ de $\check{K}$ vérifiant $|\chi| \leqslant p^{-r} \cdot |\theta^j|_p$; cela est encore plus fort que la convergence uniforme sur tout compact de $T_j(S)$ vers $\check{S}$.

Chapitre VII

Un ensemble remarquable de fréquences dans $\mathbb{Q}_p$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus spécialement au modèle $\Xi = \mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0,1[$ de $\mathbb{Q}_p$, défini en associant à $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbf{R}$ par le groupe $\mathbf{Z}(p^{-1})$ (chap. I, § 1, exemple d). Ce modèle possède un point et un seul dans chaque classe modulo $\mathbf{Z}_p$ et de ce point de vue rappelle le modèle de $\mathbf{R}$ constitué par le groupe $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs ; cependant il s'en différencie notablement pour ce qui concerne l'analyse de Fourier, comme nous allons le voir en étudiant l'espace $\mathcal{C}_\Xi(\mathbb{Q}_p)$ des fonctions continues presque périodiques sur $\mathbb{Q}_p$, à spectre dans Ξ.

Nous étudions les compacts K de $\mathbb{Q}_p$ ayant par rapport à Ξ les propriétés d'interpolation et de balayage, selon une terminologie de Beurling ([11]) que nous explicitons dans les énoncés suivants (les démonstrations seront données dans les paragraphes suivants.

a) Interpolation

Pour un compact K de $\mathbb{Q}_p$, on note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions complexes continues sur K, muni de la norme uniforme et $\overset{\circ}{K}$ l'intérieur de K. On se préoccupe de prolonger les fonctions $\mathcal{C}(K)$ en fonctions de $\mathcal{C}_\Xi(\mathbb{Q}_p)$: quand c'est possible on dit

que K est un compact d'interpolation pour Ξ.

Théorème 1. Pour tout compact K de $\mathbb{Q}_p$ de mesure (de Haar normalisée) strictement inférieure à 1, il existe une application linéaire continue L de $\mathcal{C}(K)$ dans $\mathcal{C}_\Xi(\mathbb{Q}_p)$ telle que L(f) restreinte à K égale f.

Pour les compacts dont la frontière est de mesure nulle (on dira qu'ils sont intégrables au sens de Riemann), on a la réciproque précise :

Théorème 2. Si le compact K de $\mathbb{Q}_p$ vérifie $m(K) = m(\overset{\circ}{K}) = 1$, il n'est pas d'interpolation pour Ξ.

Puisque tout ouvert de mesure strictement supérieure à 1 contient un compact ouvert de mesure 1, on déduit immédiatement du théorème 2 :

Corollaire 1. Un compact dont l'intérieur a une mesure strictement supérieure à 1 n'est pas d'interpolation pour Ξ.

b) Balayage

Pour justifier les définitions, commençons par énoncer un lemme :

Lemme 1 ([15]). Pour un compact K de $\mathbb{Q}_p$ et une constante positive C, les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Pour tout polynôme trigonométrique sur $\mathbb{Q}_p$, à spectre dans Ξ, $P(x) = \sum_{\lambda \in \Xi} a_\lambda \exp -2i\pi H_p(\lambda x)$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{Q}_p} |P(x)| \leqslant C \sup_{x \in K} |P(x)| .$$

ii) Pour toute f de $\mathcal{C}_\Xi(\mathbb{Q}_p)$, on a

$$\sup_{x\in\mathbf{Q}_p} |f(x)| \leqslant C \sup_{x\in K} |f(x)| .$$

iii) Pour toute mesure bornée ν sur $\mathbf{Q}_p$, il existe une mesure $\tilde{\nu}$ portée par K et vérifiant

α) $\|\tilde{\nu}\| \leqslant C\|\nu\|$

β) $\forall \lambda \in \Xi$, $\hat{\tilde{\nu}}(\lambda) = \hat{\nu}(\lambda)$.

iv) Pour tout t de $\mathbf{Z}(p^{-1})$, il existe une mesure μ_t portée par $K \cap \mathbf{Z}(p^{-1})$ et vérifiant

α) $\|\mu_t\| \leqslant C$

β) $\forall \lambda \in \Xi$, $\exp\left[-2i\pi H_p(\lambda t)\right] = \hat{\mu}_t(\lambda)$.

Ce lemme sera démontré au paragraphe 5 ; il justifie la

Définition 1. Un compact K pour lequel il existe une constante C telle que le couple (K , C) vérifie les propriétés du lemme 1 sera dit compact de balayage pour Ξ (propriété iii, cf. [11]) ou simplement compact associé à Ξ.

On sait ([12], § 1, th. 1) que tout ensemble harmonieux dans un groupe abélien localement compact possède des compacts associés. Ici on s'attache à donner des conditions portant sur la mesure de K pour qu'il soit associé à Ξ :

Théorème 3. Si la mesure de l'intérieur de K est strictement supérieure à 1, K est un compact associé à Ξ.

Dans le cas où K est intégrable au sens de Riemann :

Théorème 4. Si le compact K de $\mathbf{Q}_p$ vérifie $m(K) = m(\overset{o}{K}) = 1$, il n'est pas associé

à Ξ.

On en déduit immédiatement :

Corollaire 2. Si la mesure d'un compact K de $\mathbb{Q}_p$ est strictement inférieure à 1, K n'est pas associé à Ξ.

2. Le principe général des démonstrations est le suivant : considérons les groupes $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}_p$ qui sont $\mathbb{Z}(p^{-1})$- associés, π_p la projection de $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}_p$ et π_∞ sa projection sur $\mathbb{R}$. A un compact K de $\mathbb{Q}_p$ on associera le modèle Λ^K défini par K sur $\mathbb{R}$ tandis qu'au modèle Ξ correspondra l'intervalle $[0,1[$ de $\mathbb{R}$.

A toute mesure bornée μ sur $\mathbb{Q}_p$ portée par $\pi_p(\mathbb{Z}(p^{-1}))$, on pourra associer la mesure sur $\mathbb{R}$, μ' définie par

$$\forall d \in \mathbb{Z}(p^{-1}) \qquad \mu'(\{\pi_\infty(d)\}) = \mu(\{\pi_p(d)\}) ;$$

en faisant cela pour des mesures à support fini dans $\pi_p(\mathbb{Z}(p^{-1}))$ et en prenant leurs transformées de Fourier qui sont des polynômes trigonométriques, on voit comment à tout polynôme trigonométrique P sur $\mathbb{Q}_p$, à spectre dans $\pi_p(\mathbb{Z}(p^{-1}))$ on peut associer un polynôme trigonométrique P' sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall d \in \mathbb{Z}(p^{-1}), \quad P'(\pi_\infty(d)) = P(\pi_p(d)).$$

En passant à l'adhérence uniforme, à toute fonction f continue, presque périodique sur $\mathbb{Q}_p$, à spectre dans $\pi_p(\mathbb{Z}(p^{-1}))$ sera associée une fonction continue f' presque périodique sur $\mathbb{R}$. En fait f et f' sont respectivement la restriction à $\mathbb{Q}_p$ et à $\mathbb{R}$

d'une même fonction continue sur le groupe compact $\sum_p$, dual du groupe discret $\mathbf{Z}(p^{-1})$, et dans lequel $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{R}$ "s'enroulent" avec des images denses.

On se ramène ainsi à des problèmes d'interpolation et de balayage sur $\mathbf{R}$ pour lesquels on a des résultats très précis de Beurling, que nous rappellerons et qui nous donneront les théorèmes 2 et 4.

Les définitions suivantes nous seront utiles

Définition 2. Soit Λ un ensemble de $\mathbf{R}$ fini sur tout compact ; on appelle densité inférieure de Λ, la limite :

$$\underline{\mathrm{dens.}}\Lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \inf_{x\in\mathbf{R}} \mathrm{card}\left(\left[x\ ,\ x+T\right] \cap \Lambda\right)$$

et densité supérieure de Λ la limite :

$$\overline{\mathrm{dens.}}\Lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sup_{x\in\mathbf{R}} \mathrm{card}\left(\left[x\ ,\ x+T\right] \cap \Lambda\right).$$

Lorsque $\underline{\mathrm{dens.}}\Lambda = \overline{\mathrm{dens.}}\Lambda$, on appelle densité uniforme de Λ, dens. Λ, la valeur commune.

On a alors

Lemme 2. Soit E un ensemble borné de $\mathbf{Q}_p$ d'adhérence $\bar{E}$ et d'intérieur $\overset{\circ}{E}$ et soit Λ^E le modèle défini par E sur $\mathbf{Q}$; on a :

$$m(\overset{\circ}{E}) \leqslant \underline{\mathrm{dens.}}\ \Lambda^E \leqslant \overline{\mathrm{dens.}}\Lambda^E \leqslant m(\bar{E}) \qquad (m : \text{mesure de Haar normalisée sur } \mathbf{Q}_p).$$

En effet, si B est une boule de $\mathbf{Q}_p$ de mesure p^r $(r\in\mathbf{Z})$, le modèle Λ^B défini par B sur $\mathbf{R}$ est une progression arithmétique de raison p^{-r} et a donc une densité

uniforme égale à $p^r = m(B)$. On en déduit le lemme en prenant des réunions finies de boules recouvrant (respectivement contenues dans) E.

Dans le cas où E est un compact intégrable au sens de Riemann, on a évidemment dens $\Lambda^E = m(E)$.

3. Démonstration du théorème 1.

Soit ε un réel positif et r un entier relatif. Soit ψ une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, à support dans l'intervalle $[0 , p^{-r}+\varepsilon]$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} \psi(x + np^{-r}) = 1.$$

La transformée de Fourier de ψ vaut donc 1 à l'origine et s'annule en tout point np^r différent de 0.

Soit alors μ_ε la mesure définie par ψ sur $\mathbf{Q}_p$ (cf. chap. V, § 3) :

$$\mu_\varepsilon(\{\lambda\}) = \psi(\lambda), \quad \text{pour tout } \lambda \text{ de } \mathbf{Z}(p^{-1}).$$

La mesure μ_ε est portée par le modèle $\mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0 , p^{-r}+\varepsilon[$ de $\mathbf{Q}_p$ et a pour transformée de Fourier une mesure $\hat{\mu}_\varepsilon$ dont la restriction à la boule $p^r\mathbf{Z}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ est la mesure de Dirac à l'origine.

Soit alors K un compact de $\mathbf{Q}_p$ de mesure strictement inférieure à 1 : soit r un entier relatif tel que l'on puisse recouvrir K avec N boules disjointes, de mesure p^{-r}, avec $Np^{-r} < 1$:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_i .$$

Pour chacune des boules B_i, on peut trouver une fonction φ_i continue sur $\mathbb{Q}_p$, presque périodique, à spectre dans $\mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0,p^{-r}]$ et dont B_i est exactement l'ensemble des zéros : il suffit de prendre pour φ_i une translatée convenable de la transformée de Fourier de la mesure donnant la masse 1 au point 0 et la masse -1 au point p^{-r}.

Soit aussi χ_i la fonction caractéristique de B_i, et $a_i = \left[\prod_{j\neq i} \varphi_j\right]^{-1}$.

Choisissant ε réel positif tel que $\varepsilon < 1-Np^{-r}$ et considérérant la mesure μ_ε définie plus haut, on pose, pour toute fonction f continue sur K :

$$L(f) = \sum_{i=1}^{N} \left[(\chi_i \cdot f) * \hat{\mu}_\varepsilon\right] \cdot \prod_{j\neq i} \varphi_j \cdot a_i .$$

Il est clair que $L(f)$ coïncide avec f sur K d'après la définition de μ_ε. Le spectre de chacun des termes $\left[(f\cdot\chi_i) * \hat{\mu}_\varepsilon\right] \cdot \prod_{j\neq i} \varphi_j$, est contenu dans la somme des spectres de $(f\cdot\chi_i) * \hat{\mu}_\varepsilon$ $(\mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0 \ , \ p^{-r}+\varepsilon])$ et de chaque $\varphi_j(\mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0,p^{-r}])$ soit finalement dans

$$\mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0 \ , \ (p^{-r}+\varepsilon) + (N-1)p^{-r}] \subset \mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0,1[.$$

Cela achève la démonstration du théorème 1.

4. Démonstration du théorème 2.

Soit Λ un ensemble bien séparé de $\mathbf{R}$; on dira que Λ est d'interpolation pour $[0,1]$ si toute fonction bornée sur Λ se prolonge en une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$ à spectre dans $[0,1]$. On a à ce sujet, un résultat de Beurling (non publié, cité par Landau : [11]).

Théorème A. Pour que Λ soit d'interpolation pour $[0,1]$, il faut et il suffit que $\overline{\text{dens}}\ \Lambda < 1$.

Le théorème 2 est alors une conséquence immédiate de ce théorème A, du lemme 2 et du lemme suivant :

Lemme 3. Soit K un compact de $\mathbf{Q}_p$ et Λ^K le modèle défini sur $\mathbf{R}$ par K. Si K est un compact d'interpolation pour Ξ, Λ^K est un compact d'interpolation pour $[0,1]$.

Démonstration. Si K est d'interpolation pour Ξ, l'application de $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{Q}_p)$ dans $\mathcal{C}(K)$ qui fait correspondre à une fonction f de $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{Q}_p)$ sa restriction à K est surjective et ouverte, donc continue d'après le théorème de Banach. Il existe donc une constante C positive telle que, pour toute f de $\mathcal{C}(K)$ on puisse trouver un prolongement F appartenant à $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{Q}_p)$ et vérifiant

$$\sup_{x\in\mathbf{Q}_p} |F(x)| \leqslant C \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Soit $\mathcal{C}(\Lambda^K)$, l'espace des fonctions bornées sur le modèle Λ^K défini sur $\mathbf{R}$ par K. A tout élément b de $\mathcal{C}(\Lambda^K)$ associons la fonction b' définie sur $K \cap \pi_p(\mathbf{Z}(p^{-1}))$ par

$$b'(\pi_p(d)) = b(\pi_\infty(d)), \qquad \forall\, \pi_\infty(d) \in \Lambda^K.$$

Soit $\mathcal{C}_p(\Lambda^K)$ le sous espace de $\mathcal{C}(\Lambda^K)$ formé des élément b dont la fonction b' associée possède un prolongement continu f_b à K : par hypothèse ce prolongement admet lui-même un prolongement F_b en une fonction de $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{Q}_p)$ et en choisissant f_b convenablement on peut s'assurer que $\sup_{x\in\mathbf{Q}_p} |F_b(x)| \leqslant C \sup_{\lambda\in\Lambda^K} |b(\lambda)|$.

Mais à la fonction F_b de $\mathcal{C}_{\Xi}(\mathbb{Q}_p)$ on peut faire correspondre une fonction F'_b continue presque périodique sur $\mathbb{R}$ à spectre dans $[0,1]$ comme il est expliqué au § 2 ; et cette fonction vérifie

$$\forall \lambda \in \Lambda^K , \quad F'_b(\lambda) = b(\lambda),$$

et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F'_b(x)| \leqslant C \sup_{\lambda\in\Lambda^K} |b(\lambda)|.$$

On sait donc interpoler les éléments de $\mathcal{C}_p(\Lambda^K)$. Mais si b est un élément quelconque de $\mathcal{C}(\Lambda^K)$, on peut trouver une suite b_n d'éléments de $\mathcal{C}_p(\Lambda^K)$ qui converge vers b en tout point de Λ^K avec, en plus, $\sup_{\lambda\in\Lambda^K} |b_n(\lambda)| \leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda^K} |b(\lambda)|$. La suite des interpolations F'_{b_n}, qui ont toutes leur spectre dans $[0 , 1]$ et qui sont uniformément bornées par $C \sup_{\lambda\in\Lambda^K} |b(\lambda)|$, à une valeur d'adhérence faible dans la topologie $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}) , L^1(\mathbb{R}))$ qui est une fonction continue bornée F' à spectre dans $[0 , 1]$ et qui vérifie $F'(\lambda) = b(\lambda)$ pour tout λ de Λ^K.

Donc Λ^K est bien d'interpolation pour $[0,1]$, ce qui achève de prouver le lemme 3 et du même coup le théorème 2.

5. Donnons d'abord la <u>démonstration du lemme</u> 1.

Les polynômes trigonométriques étant denses dans $\mathcal{C}_{\Xi}(\mathbb{Q}_p)$, les conditions i) et ii) sont équivalentes ; la condition ii) entraine la condition iii) par application du théorème de Hahn-Banach tandis que iv) entraine i) par densité de $\mathbb{Z}(p^{-1})$ dans $\mathbb{Q}_p$.

Reste à montrer que iii) entraine iv) et soit donc t un élément de $\mathbf{Z}(p^{-1})$ et δ_t la mesure de Dirac au point t. D'après la propriété iii) il lui correspond une mesure ν portée par K vérifiant $\|\nu\| \leqslant C$ et $\hat{\nu}(\lambda) = \hat{\delta}_t(\lambda) = \exp(-2i\pi H_p(t\lambda))$, pour tout λ de Ξ.

Décomposant la mesure ν en somme d'une mesure portée par $\mathbf{Z}(p^{-1})$, ν_d, et d'une mesure portée par le complémentaire de $\mathbf{Z}(p^{-1})$, ν_c, nous allons voir que l'on a encore

$$\hat{\nu}_d(\lambda) = \hat{\delta}_t(\lambda), \qquad \forall \lambda \in \Xi,$$

ce qui, avec $\|\nu_d\| \leqslant C$, qui est clair, montrera que ν_d remplit les conditions imposées à la mesure μ_t cherchée.

Pour cela considérons une fonction φ indéfiniment dérivable à décroissance rapide sur $\mathbf{R}$ dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ s'annule hors de $]0, 1[$ et seulement là. Le groupe $\mathbf{Q}_p$ étant $\mathbf{Z}(p^{-1})$ associé à $\mathbf{R}$, soit α la mesure définie par φ sur $\mathbf{Q}_p$ (cf. chap. V, § 3) donc portée par $\mathbf{Z}(p^{-1})$ et $\hat{\alpha}$ sa transformée de Fourier, qui est définie par $\hat{\varphi}$. La mesure $\hat{\alpha}$ a donc son support dans Ξ et

$$(\delta_t - \nu)^{\wedge} \cdot \hat{\alpha} = 0$$

d'où

$$\delta_t * \alpha = \nu_d * \alpha = \nu_c * \alpha.$$

Le membre de gauche est une mesure portée par $\mathbf{Z}(p^{-1})$ et le membre de droite une mesure portée par le complémentaire de $\mathbf{Z}(p^{-1})$: ils sont donc nuls. Cela entraine que $\hat{\nu}_d(\lambda) = \hat{\delta}_t(\lambda)$ en tout point λ pour lequel $\hat{\alpha}(\{\lambda\}) \neq 0$, c'est-à-dire pour λ dans $\mathbf{Z}(p^{-1}) \cap]0,1[$. Mais comme ν_d et δ_t sont portées par $\mathbf{Z}(p^{-1})$ leurs transformées de

Fourier sont continues pour la topologie induite sur $\mathbf{Q}_p$ par celle du groupe compact $\sum_p$ dual de $\mathbf{Z}(p^{-1})$. Et comme cette topologie induit sur $\mathbf{Z}(p^{-1})$ (considéré comme sous-ensemble de $\mathbf{Q}_p$) une topologie moins finie que celle induite sur $\mathbf{Z}(p^{-1})$ (considéré comme sous-ensemble de $\mathbf{R}$) par $\mathbf{R}$, on a $\hat{\nu}_d(\lambda) = \hat{\delta}_t(\lambda)$ pour tout λ de $\mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0,1]$ et donc sur Ξ. D'où le lemme 1.

6. Démonstration des théorèmes 3 et 4.

Là encore nous aurons besoin d'un théorème non publié de Beurling.

Soit Λ un ensemble bien séparé de $\mathbf{R}$; on dit que Λ est un ensemble de balayage pour l'intervalle $[0,1]$ s'il existe une constante C telle que pour toute fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$ à spectre dans $[0,1]$ on a

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| \leqslant C \sup_{x \in \Lambda} |f(x)| .$$

Alors on a :

Théorème B ([11]). *Pour que Λ soit un ensemble de balayage pour $[0,1]$, il faut et il suffit que dens $\Lambda > 1$.*

Compte tenu du lemme 2, les théorèmes 3 et 4 sur $\mathbf{Q}_p$ résulteront du théorème B et du lemme :

Lemme 4. *Pour que le compact K soit un compact de balayage pour Ξ, il faut et il suffit que le modèle Λ^K défini sur $\mathbf{R}$ par K soit un ensemble de balayage pour $[0,1]$.*

a) Supposons d'abord que Λ^K soit un ensemble de balayage pour $[0,1]$. A toute fonction f de $\mathcal{C}_\Xi(\mathbf{Q}_p)$, associons la fonction f' continue presque périodique sur $\mathbf{R}$, à spectre dans $[0,1]$ comme il est indiqué au paragraphe 2.

Alors

$$\sup_{x\in\mathbf{Q}_p} |f(x)| = \sup_{d\in\mathbf{Z}(p^{-1})} f(\pi_p(d)) = \sup_{d\in\mathbf{Z}(p^{-1})} f'(\pi_\infty(d)) = \sup_{y\in\mathbf{R}} |f'(y)|,$$

et

$$\sup_{x\in K} |f(x)| \geqslant \sup_{x\in K\cap\pi_p(\mathbf{Z}(p^{-1}))} |f(x)| = \sup_{\lambda\in\Lambda^K} |f'(\lambda)|.$$

Puisque par hypothèse

$$\sup_{y\in\mathbf{R}} |f'(y)| \leqslant C \sup_{\lambda\in\Lambda^K} |f'(\lambda)|,$$

il en résulte

$$\sup_{x\in\mathbf{Q}_p} |f(x)| \leqslant C \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

b) Si maintenant K est un compact de balayage pour Ξ, il existe d'après le lemme 1 une constante C et pour tout t de $\pi_p(\mathbf{Z}(p^{-1}))$ une mesure μ_t de masse inférieure à C et portée par $\pi_p(\mathbf{Z}(p^{-1}))\cap K$ vérifiant pour tout λ de Ξ

$$\hat{\mu}_t(\lambda) = \exp -2i\pi H_p(\lambda t).$$

Associant à cette mesure la mesure μ'_t portée par le modèle Λ^K, comme il est dit au paragraphe 2 $(\mu'_t(\{\pi_\infty(d)\}) = \mu_t(\{\pi_p(d)\})$, pour tout d de $\mathbf{Z}(p^{-1}))$, on voit que la mesure μ'_t vérifie

$$\hat{\mu}'_t(x) = \exp(-2i\pi tx), \text{ pour tout } x \text{ de } [0,1[\cap\mathbf{Z}(p^{-1}),$$

et donc pour tout x de $[0,1]$, par densité.

Si alors f est une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$ à spectre dans $[0,1]$ et si

t est un élément de $\pi_{\infty}(\mathbf{Z}(p^{-1}))$ choisi pour que $|f(t)| \geqslant (1-\varepsilon) \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$, on a

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} |f(t)| = \frac{1}{1-\varepsilon} \left| \int f(\xi) d\mu_t(\xi) \right|$$

$$\leqslant C \sup_{\lambda\in\Lambda^K} |f(\lambda)|.$$

Ce qui prouve que Λ^K est de balayage pour $[0,1]$.

Bibliographie

[1] BERTRANDIAS, F. Ensembles remarquables d'adèles algébriques. Thèse. Bull. Soc. Math. France, mémoire n° 4 (1965).

[2] BOHR, H. Almost periodic functions. Chelsea publ. 1947.

[3] BRUHAT, F. Distributions sur un groupe localement compact et applications... Bull. Soc. Math. France, t. 89, 1961, pp. 43-75.

[4] CHABAUTY, C. Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231 (1950), pp. 465-466.

[5] DAVIS, H. W. On the mean value of Haar measurable almost periodic functions. Duke J. of Math. (1967), pp. 201-214.

[6] DESCOMPS-GUILLOUX, A. Généralisation des nombres de Salem aux adèles. Thèse Sciences Math. Paris 1967.

[7] HERTZ, C. Spectral theory of functions. T. A. M. S., 1960, pp. 181-232

[8] HEWITT, E. and ROSS, K. Abstract harmonic analysis. Vol. 1. Springer Verlag, Berlin 1963.

[9] KAHANE, J.-P. Séries de Fourier absolument convergentes. Springer Verlag, Berlin 1970.

[10] KAHANE, J.-P. et SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann, Paris 1963.

[11] LANDAU, H. J. Necessary density conditions for sampling and interpolation... Acta Math., 117 (1967), pp. 37-52.

[12] MEYER, Y. Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique. Cours Peccot, 1969, Lectures notes in math. n° 117.

[13] _____ Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique. Studia Math. t. XXXIV (1970) pp. 127-147.

[14] _____ Nombres de Pisot et synthèse harmonique. Ann. Ec. Norm. Sup., 4e série (1970), p. 235.

[14'] _____ Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions. Ann. Inst. Fourier, t. XVIII (1968), pp. 73-86.

[14"] _____ Nombres algébriques et analyse harmonique. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., t. 3 (1970), pp. 75-110.

[15] _____ Communication orale.

[16] SCHREIBER, J.-P. Sur les nombres de Chabauty-Pisot-Salem des extensions algébriques de Q_p. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269 (1969), pp. 71-73.

[17] ———————— Une caractérisation des nombres de Pisot-Salem des corps p-adiques. Bull. Soc. Math. de France, mémoire 19 (1969), pp. 55-63.

[18] ———————— Sur la notion de modèles dans les groupes abéliens localement compacts. C. R. Acad. Sc. Paris t. 272 (1971), pp. 30-32.

[19] ———————— Un ensemble remarquable du point de vue de l'analyse de Fourier sur Q_p. Colloquium Math., vol. XXIII (1971), pp. 125-132.

[20] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. Intersciences Publishers, New-York, 1962.

[21] WEIL , A. Basic numbers theory. Springer-Verlag, Berlin, 1967.